Parte I

Matematica per le Applicazioni Economiche

Capitolo 1

Disequazioni

1.1. Definizioni

Una disequazione è una disuguaglianza fra due espressioni contenenti una o più incognite. Nel caso di una sola incognita, in particolare, si ha:

$$A(x) \gtreqless B(x) \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

Soluzioni della disequazione sono quei valori dell'incognita che rendono vera la disuguaglianza.

Due disequazioni si dicono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni; valgono a questo proposito i seguenti due principi fondamentali:

1. Aggiungendo o togliendo ad entrambi i membri di una disequazione una stessa quantità (costante o variabile) si ottiene una disequazione equivalente a quella data:
$$A(x) > B(x) \Rightarrow A(x) + C(x) > B(x) + C(x)$$

2. Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per una stessa quantità (costante) positiva si ottiene una disequazione equivalente a quella data, moltiplicandoli o dividendoli per una stessa quantità (costante) negativa si ottiene una disequazione equivalente a quella data rovesciando il verso della disuguaglianza:
$$A(x) > B(x) \Rightarrow \begin{cases} c \cdot A(x) > c \cdot B(x) & \text{se} \quad c > 0 \\ \\ c \cdot A(x) < c \cdot B(x) & \text{se} \quad c < 0 \end{cases}$$

Questi due principi vengono utilizzati per risolvere una disequazione, trasformando la disequazione iniziale in una più semplice, ad essa equivalente.

Esempio 1.1 *Risolvere la disequazione:*

$$x - 5 \geq 0$$

Aggiungendo la quantità (costante) $+5$ ad entrambi i membri si ottiene (sfruttando il 1° principio di equivalenza):

$$x - 5 + 5 \geq 0 + 5$$

cioè:

$$x \geq 5$$

che è la soluzione cercata.

Esempio 1.2 *Risolvere la disequazione:*

$$2x + 3 > x$$

Aggiungendo la quantità (variabile) $-x$ ad entrambi i membri si ottiene (sfruttando il 1° principio di equivalenza):

$$2x + 3 - x > x - x$$

cioè:

$$x + 3 > 0$$

e poi aggiungendo la quantità (costante) -3 ad entrambi i membri si ottiene (sfruttando ancora il 1° principio di equivalenza):

$$x + 3 - 3 > 0 - 3$$

cioè:

$$x > -3$$

che è la soluzione cercata.

Esempio 1.3 *Risolvere la disequazione:*

$$4x > 5$$

Moltiplicando entrambi i membri per la quantità (costante e positiva) $\frac{1}{4}$ si ottiene (sfruttando il 2° principio di equivalenza):

$$\frac{1}{4} \cdot 4x > \frac{1}{4} \cdot 5$$

cioè:

$$x > \frac{5}{4}$$

che è la soluzione cercata.

Esempio 1.4 *Risolvere la disequazione:*

$$-4x > 5$$

Moltiplicando entrambi i membri per la quantità (costante e negativa) $-\frac{1}{4}$ si ottiene (sfruttando il 2° principio di equivalenza e rovesciando la disuguaglianza):

$$\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-4x) < \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 5$$

cioè:

$$x < -\frac{5}{4}$$

che è la soluzione cercata.

In pratica, i due principi di equivalenza illustrati si applicano osservando che è possibile spostare un termine da un membro all'altro della disequazione a condizione di cambiarne il segno (1° principio) e che è possibile moltiplicare o dividere entrambi i membri della disequazione per una stessa quantità, tenendo presente che il verso della disuguaglianza va conservato se questa quantità è positiva mentre va rovesciato se questa quantità è negativa (2° principio).

Si possono a questo punto introdurre i principali tipi di disequazioni: razionali intere (di 1° e 2° grado), razionali fratte (e contenenti prodotti di polinomi), con valore assoluto, irrazionali, logaritmiche ed esponenziali, oltre ai sistemi di disequazioni.

1.2. Disequazioni razionali intere di 1° grado

Le disequazioni razionali intere di 1° grado si possono sempre ricondurre alla forma canonica:

$$ax + b \gtreqless 0 \qquad \text{con } a > 0$$

(se fosse $a < 0$ è sufficiente moltiplicare entrambi i membri della disequazione per -1 e cambiare verso alla disuguaglianza, riconducendosi così alla forma canonica con $a > 0$). Da questa forma si ottiene facilmente la soluzione, che è:

$$x \gtreqless -\frac{b}{a}$$

Esempio 1.5 *Risolvere la disequazione:*

$$4x - 12 > 0$$

In questo caso la disequazione si presenta già nella forma canonica, applicando i principi di equivalenza visti in precedenza si ottiene facilmente:

$$4x > 12$$

e poi:

$$x > 3$$

che è la soluzione.

Esempio 1.6 *Risolvere la disequazione:*

$$-4x - 12 > 0$$

In questo caso la disequazione non è scritta in forma canonica (in quanto $a < 0$), moltiplicando entrambi i membri per -1 (e rovesciando la disuguaglianza) si ottiene allora innanzitutto:

$$4x + 12 < 0$$

che è la disequazione scritta nella forma canonica (in quanto $a > 0$). Da questa si ricava poi facilmente (applicando i principi di equivalenza visti in precedenza):

$$4x < -12$$

e poi:

$$x < -3$$

che è la soluzione.

1.3. Disequazioni razionali intere di 2° grado

Le disequazioni razionali intere di 2° grado si possono sempre ricondurre alla forma canonica:

$$ax^2 + bx + c \gtreqless 0 \qquad \text{con } a > 0$$

(se fosse $a < 0$ è sufficiente moltiplicare entrambi i membri della disequazione per -1 e cambiare verso alla disuguaglianza, riconducendosi così alla forma canonica con $a > 0$). Per risolvere una disequazione di questo tipo si considera innanzitutto l'equazione di 2° grado associata:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e se ne calcolano le radici x_1 e x_2 (dove si ipotizza $x_1 < x_2$ nel caso di radici distinte).

Vale a questo punto la seguente regola:

- Per valori di x esterni all'intervallo avente per estremi le radici (cioè per $x < x_1$ e per $x > x_2$) il trinomio $ax^2 + bx + c$ ha lo stesso segno del coefficiente del termine di grado massimo (cioè ha lo stesso segno di a).
- Per valori di x interni all'intervallo avente per estremi le radici (cioè per $x_1 < x < x_2$) il trinomio $ax^2 + bx + c$ ha il segno opposto a quello del coefficiente del termine di grado massimo (cioè ha segno opposto a quello di a).
- Per valori di x uguali alle radici (cioè per $x = x_1$ e per $x = x_2$) il trinomio $ax^2 + bx + c$ è nullo.

Più precisamente, tenendo presente che un'equazione di 2° grado può avere 2 radici reali distinte, 2 radici reali coincidenti oppure nessuna radice reale, si possono distinguere i seguenti 3 casi:

1. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. In questo caso l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ possiede 2 radici reali distinte x_1, x_2 (dove si ipotizza $x_1 < x_2$) e per il trinomio $ax^2 + bx + c$ si ha:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \text{per} \qquad x < x_1 \quad \vee \quad x > x_2$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad \text{per} \qquad x_1 < x < x_2$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{per} \qquad x = x_1 \quad \vee \quad x = x_2$$

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. In questo caso l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ possiede 2 radici reali coincidenti $x_1 = x_2$ e per il trinomio $ax^2 + bx + c$ si ha:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \text{per} \qquad x \neq x_1, x_2$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{per} \qquad x = x_1, x_2$$

3. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. In questo caso l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ non possiede radici reali e per il trinomio $ax^2 + bx + c$ si ha:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

La regola prima enunciata risulta quindi valida in generale, tenendo presente che se $\Delta = 0$ tutti i valori di x diversi dalle radici $x_1 = x_2$ sono da considerarsi esterni all'intervallo avente per estremi le radici stesse (e quindi non vi sono valori di x interni a tale intervallo), mentre se $\Delta < 0$ tutti i valori di x sono da considerarsi esterni all'intervallo avente per estremi le radici (intervallo che risulta in realtà essere vuoto, non essendovi tali radici, per cui anche in questo caso non vi sono valori di x interni ad esso).

Esempio 1.7 *Risolvere la disequazione:*

$$x^2 - 2x - 8 > 0$$

In questo caso la disequazione si presenta già nella forma canonica, inoltre l'equazione associata:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

possiede due radici reali distinte $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$. Applicando la regola vista sopra si ha che la soluzione della disequazione è data da:

$$x < -2 \quad \vee \quad x > 4$$

Esempio 1.8 *Risolvere la disequazione:*

$$-x^2 + 2x + 8 > 0$$

In questo caso la disequazione non è scritta in forma canonica, conviene allora innanzitutto riscriverla in modo da ricondursi a tale forma; moltiplicando entrambi i membri per -1 (e rovesciando la disuguaglianza) si ottiene:

$$x^2 - 2x - 8 < 0$$

la cui equazione associata (la stessa dell'esercizio precedente) ha radici $x_1 = -2$ e $x_2 = 4$. Applicando la regola vista sopra si ha che la soluzione della disequazione è data da:

$$-2 < x < 4$$

Esempio 1.9 *Risolvere la disequazione:*

$$-6x^2 + 36x < 0$$

Riscrivendo la disequazione in forma canonica si ottiene innanzitutto:

$$6x^2 - 36x > 0$$

la cui equazione associata:

$$6x^2 - 36x = 0$$

ha radici $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$. La disequazione ha allora soluzione data da:

$$x < 0 \quad \vee \quad x > 6$$

Esempio 1.10 *Risolvere la disequazione:*

$$x^2 \geq 9$$

Conviene innanzitutto ricondursi alla forma canonica scrivendo la disequazione nella forma:

$$x^2 - 9 \geq 0$$

dopodiché si osserva che l'equazione associata:

$$x^2 - 9 = 0$$

possiede radici $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$. La disequazione ha allora soluzione data da:

$$x \leq -3 \quad \vee \quad x \geq 3$$

Esempio 1.11 *Risolvere la disequazione:*

$$x^2 - 2x + 1 < 0$$

In questo caso l'equazione associata:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

ha due radici reali coincidenti $x_1 = x_2 = 1$, applicando la regola vista sopra si ha allora che la disequazione non è mai soddisfatta (lo stesso risultato può essere ottenuto osservando che il primo membro della disequazione non è altro che $(x-1)^2$ che, essendo un quadrato, non potrà mai essere < 0).

Esempio 1.12 *Risolvere la disequazione:*

$$6x^2 + 5 > 0$$

In questo caso l'equazione associata:

$$6x^2 + 5 = 0$$

non possiede radici reali, applicando la regola vista sopra si ha allora che la disequazione è soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R}$ (lo stesso risultato può essere ottenuto osservando che il primo membro della disequazione è la somma di un termine non negativo, $6x^2$, e di un termine positivo, 5, quindi è strettamente positivo qualunque sia il valore di x, per cui la disequazione è sempre verificata).

1.4. Disequazioni razionali fratte

Le disequazioni razionali fratte sono quelle nelle quali l'incognita compare a denominatore di una frazione e si possono sempre ricondurre alla forma canonica:

$$\frac{N(x)}{D(x)} \gtreqless 0$$

In questo caso occorre innanzitutto scartare i valori di x che annullano il denominatore della frazione $D(x)$ (in quanto una frazione con denominatore nullo perde significato), dopodiché si studia separatamente il segno di $N(x)$ e quello di $D(x)$ e, combinandoli attraverso la "regola dei segni", si determina il segno della frazione, risolvendo così la disequazione.

Esempio 1.13 *Risolvere la disequazione:*

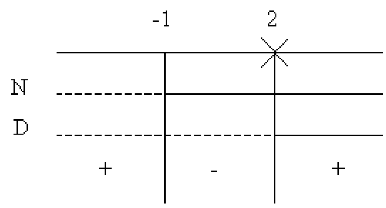
$$\frac{x+1}{4x-8} > 0$$

Deve essere innanzitutto $4x - 8 \neq 0$, da cui $x \neq 2$ (condizione di realtà della frazione). Studiando separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore della frazione si ha poi:

$$N(x) > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$D(x) > 0 \Rightarrow 4x - 8 > 0 \Rightarrow x > 2$$

Il segno di $N(x)$ e di $D(x)$, insieme a quello globale della frazione, può essere rappresentato graficamente nel modo seguente (dove la linea continua indica gli intervalli in cui il segno è positivo e la linea tratteggiata gli intervalli in cui il segno è negativo, mentre la croce indica il valore escluso dal campo di esistenza):



Dall'analisi di questo grafico si ha che la soluzione della disequazione è data da:

$$x < -1 \quad \vee \quad x > 2$$

Esempio 1.14 *Risolvere la disequazione:*

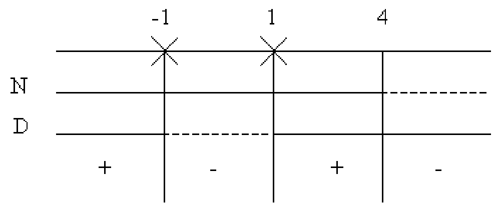
$$\frac{-x+4}{x^2-1} \leq 0$$

Deve essere innanzitutto $x^2 - 1 \neq 0$, da cui $x \neq \mp 1$ (condizione di realtà della frazione). Studiando il segno del numeratore e del denominatore della frazione si ha poi:

$$N(x) \geq 0 \Rightarrow -x+4 \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$$

$$D(x) > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1 \quad \vee \quad x > 1$$

e graficamente:



per cui la soluzione della disequazione è data da:

$$-1 < x < 1 \quad \vee \quad x \geq 4$$

Poiché il segno di un prodotto segue le stesse regole del segno di un rapporto, lo stesso procedimento visto per risolvere le disequazioni razionali fratte può essere utilizzato anche per risolvere disequazioni contenenti solo prodotti di polinomi. In questo caso si studiano separatamente i segni dei singoli fattori e poi, combinandoli come visto in precedenza, si determina il segno del prodotto, risolvendo così la disequazione.

Esempio 1.15 *Risolvere la disequazione:*

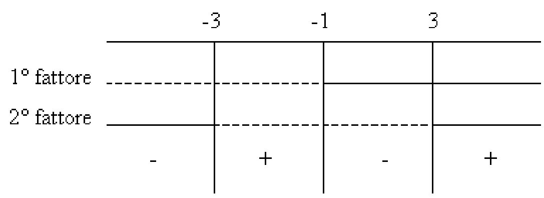
$$(x+1)(x^2-9) > 0$$

Studiando separatamente il segno di ciascuno dei due fattori si ottiene:

$$1^\circ \text{ fattore} > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$2^\circ \text{ fattore} > 0 \Rightarrow x^2-9 > 0 \Rightarrow x < -3 \quad \vee \quad x > 3$$

e combinandoli graficamente:



per cui la soluzione della disequazione è data da:

$$-3 < x < -1 \quad \vee \quad x > 3$$

Esempio 1.16 *Risolvere la disequazione:*

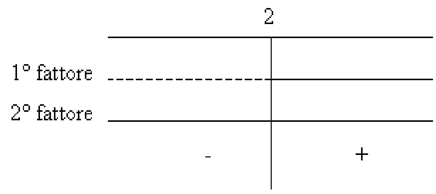
$$(x-2)(x^2-x+1) \leq 0$$

Studiando separatamente il segno di ciascuno dei due fattori si ottiene:

$$1^\circ \text{ fattore} \geq 0 \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$2^\circ \text{ fattore} \geq 0 \Rightarrow x^2-x+1 \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

e combinandoli graficamente:



per cui la soluzione della disequazione è data da:

$$x \leq 2$$

1.5. Sistemi di disequazioni

Un sistema di disequazioni è un insieme di due o più disequazioni che devono essere verificate simultaneamente. La soluzione del sistema è data dall'intersezione delle soluzioni delle singole disequazioni, e per risolvere un sistema di disequazioni occorre quindi risolvere ciascuna delle disequazioni che lo compongono e considerare poi solo le soluzioni che soddisfano contemporaneamente tutte le disequazioni del sistema. A questo scopo è possibile utilizzare una rappresentazione grafica, in cui si indicano con una linea continua gli insiemi soluzione di ogni disequazione; il sistema è allora soddisfatto negli intervalli in corrispondenza dei quali tutte le linee (tante quante le disequazioni che compongono il sistema stesso) sono continue.

Esempio 1.17 *Risolvere il sistema di disequazioni:*

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{4x-8} > 0 \\ \\ -x^2 + 2x + 8 > 0 \end{cases}$$

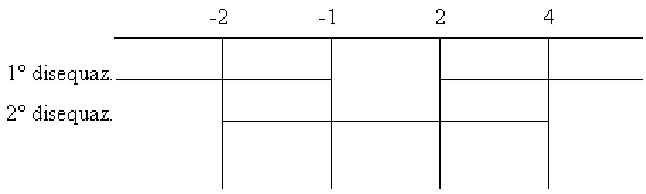
Ciascuna delle due disequazioni che compongono il sistema è già stata risolta in precedenza; in particolare, si è visto che la disequazione fratta ha soluzione:

$$x < -1 \quad \vee \quad x > 2$$

mentre la disequazione di 2° grado ha soluzione:

$$-2 < x < 4$$

A questo punto è possibile rappresentare graficamente questi insiemi di soluzioni, ottenendo:



da cui si deduce che il sistema considerato ha soluzione:

$$-2 < x < -1 \quad \vee \quad 2 < x < 4$$

perché in corrispondenza di questi intervalli vi sono contemporaneamente due linee continue (tante quante le disequazioni che formano il sistema).

Esempio 1.18 *Risolvere il sistema di disequazioni:*

$$\begin{cases} -4x - 12 > 0 \\ \\ \dfrac{-x+4}{x^2-1} \leq 0 \end{cases}$$

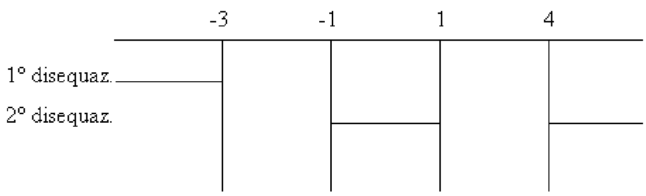
Ciascuna delle due disequazioni che compongono il sistema è già stata risolta in precedenza; in particolare, la prima ha soluzione:

$$x < -3$$

mentre la seconda ha soluzione:

$$-1 < x < 1 \quad \vee \quad x \geq 4$$

Rappresentando graficamente questi insiemi di soluzioni si ottiene:



da cui si deduce che il sistema considerato non ammette soluzioni (perché in nessun intervallo dell'asse reale vi sono contemporaneamente due linee continue), cioè è impossibile.

1.6. Disequazioni con valore assoluto

Le disequazioni con valore assoluto sono quelle contenenti il valore assoluto di una o più espressioni. Dato $x \in \mathbb{R}$, il valore assoluto di x è definito nel modo seguente:

$$| x |= \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Più in generale, data un'espressione $f(x)$ che dipende da una quantità variabile x, il valore assoluto di $f(x)$ è definito come:

$$| f(x) |= \begin{cases} f(x) & \forall x : f(x) \geq 0 \\ \\ -f(x) & \forall x : f(x) < 0 \end{cases}$$

Per definizione il valore assoluto di una determinata espressione è quindi sempre non negativo, e in particolare è nullo quando è nulla l'espressione contenuta nel valore assoluto.

Per risolvere una disequazione contenente uno o più valori assoluti è necessario "spezzarla" in due o più (sistemi di) disequazioni corrispondenti agli intervalli di positività e di negatività delle espressioni alle quali i valori assoluti si riferiscono, e la soluzione cercata è data dall'unione delle soluzioni di queste singole disequazioni.

Esempio 1.19 *Risolvere la disequazione:*

$$| x + 3 |< 1$$

Applicando la definizione di valore assoluto all'espressione $| x + 3 |$ si ottiene:

$$| x + 3 |= \begin{cases} x + 3 & \text{se} \quad x + 3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -3 \\ \\ -x - 3 & \text{se} \quad x + 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -3 \end{cases}$$

A questo punto, la disequazione di partenza può essere "spezzata" nei due sistemi:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ \\ x + 3 < 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x + 3 < 0 \\ \\ -x - 3 < 1 \end{cases}$$

che diventano:

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ \\ x < -2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -3 \\ \\ x > -4 \end{cases}$$

e poi:

$$-3 \leq x < -2 \quad \vee \quad -4 < x < -3$$

e infine:

$$-4 < x < -2$$

che rappresenta la soluzione della disequazione iniziale.

Un modo equivalente di risolvere una disequazione con valore assoluto come quella illustrata consiste nell'utilizzare il seguente procedimento:

1. Si distingue il caso in cui l'espressione contenuta nel valore assoluto è positiva o nulla da quello in cui l'espressione è negativa, e si scrivono le corrispondenti disequazioni.
2. Si risolve ciascuna delle disequazioni così ottenute e si combina la soluzione trovata con le condizioni ottenute distinguendo il caso in cui l'espressione contenuta nel valore assoluto è positiva o nulla da quello in cui l'espressione è negativa.
3. Si considera l'unione delle soluzioni trovate per ciascuna disequazione.

Utilizzando questo metodo, per risolvere la precedente disequazione si procede nel modo seguente:

a) Se $x + 3 \geq 0$, cioè $x \geq -3$, allora la disequazione è:

$$x + 3 < 1$$

da cui:

$$x < -2$$

purché sia anche $x \geq -3$ (che è l'insieme dei valori di x per i quali si ha $x + 3 \geq 0$, che è il caso che si sta considerando), per cui la soluzione di questa prima parte della disequazione è:

$$-3 \leq x < -2$$

che coincide con la soluzione del primo sistema ottenuto in precedenza.

b) Se $x + 3 < 0$, cioè $x < -3$, allora la disequazione è:

$$-x - 3 < 1$$

da cui:

$$x > -4$$

purché sia anche $x < -3$ (che è l'insieme dei valori di x per i quali si ha $x + 3 < 0$, che è il caso che si sta considerando), per cui la soluzione di questa seconda parte della disequazione è:

$$-4 < x < -3$$

che coincide con la soluzione del secondo sistema ottenuto in precedenza.

c) Combinando i risultati ottenuti ai punti a) e b) si ha:

$$-4 < x < -2$$

che è la soluzione della disequazione iniziale, e coincide con quella trovata in precedenza.

Esempio 1.20 *Risolvere la disequazione:*

$$\frac{| x + 3 |}{| x - 4 |} < 1$$

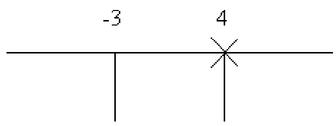
In questo caso occorre innanzitutto escludere i valori di x che annullano il denominatore, per cui deve essere $x - 4 \neq 0$, cioè $x \neq 4$. Quando nella disequazione compaiono più valori assoluti, poi, occorre necessariamente "spezzare" la disequazione in più (sistemi di) disequazioni, individuando gli intervalli nei quali una almeno delle espressioni che compaiono dentro i valori assoluti cambia segno. Nel caso considerato si ha:

$$| x + 3 | = \begin{cases} x + 3 & \text{se} \quad x + 3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -3 \\ \\ -x - 3 & \text{se} \quad x + 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -3 \end{cases}$$

e poi:

$$| x - 4 | = \begin{cases} x - 4 & \text{se} \quad x - 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 4 \\ \\ -x + 4 & \text{se} \quad x - 4 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 4 \end{cases}$$

per cui i valori "critici", che delimitano gli intervalli in corrispondenza di ciascuno dei quali una delle espressioni che compaiono dentro i valori assoluti cambia segno, sono -3 e 4:



A questo punto la disequazione di partenza può essere "spezzata" nei seguenti 3 sistemi (uno per ciascuno degli intervalli in cui una delle espressioni contenute nei valori assoluti cambia segno):

$$\begin{cases} x < -3 \\ \dfrac{-x-3}{-x+4} < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} -3 \leq x < 4 \\ \dfrac{x+3}{-x+4} < 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 4 \\ \dfrac{x+3}{x-4} < 1 \end{cases}$$

che diventano:

$$\begin{cases} x < -3 \\ \dfrac{-x-3}{-x+4} - 1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -3 \leq x < 4 \\ \dfrac{x+3}{-x+4} - 1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 4 \\ \dfrac{x+3}{x-4} - 1 < 0 \end{cases}$$

e poi:

$$\begin{cases} x < -3 \\ \dfrac{-7}{-x+4} < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -3 \leq x < 4 \\ \dfrac{2x-1}{-x+4} < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 4 \\ \dfrac{7}{x-4} < 0 \end{cases}$$

Con semplici calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} x < -3 \\ x < 4 \end{cases} \vee \begin{cases} -3 \leq x < 4 \\ x < \dfrac{1}{2} \quad \vee \quad x > 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 4 \\ x < 4 \end{cases}$$

cioè:

$$x < -3 \quad \vee \quad -3 \leq x < \frac{1}{2} \quad \vee \quad \emptyset$$

per cui la soluzione della disequazione di partenza è:

$$x < \frac{1}{2}$$

Esempio 1.21 *Risolvere la disequazione:*

$$\left|\frac{x+3}{x-4}\right| < 1$$

La disequazione è la stessa dell'esercizio precedente, nella quale però il valore assoluto del primo membro non viene spezzato nel rapporto tra valore assoluto del numeratore e valore assoluto del denominatore (per cui si viene ad avere un solo valore assoluto anziché due come accadeva prima). Anche in questo caso occorre innanzitutto escludere i valori di x che annullano il denominatore della frazione, per cui deve essere $x - 4 \neq 0$, cioè $x \neq 4$. Dalla definizione di valore assoluto applicata alla frazione $\frac{x+3}{x-4}$ si ha poi:

$$\left|\frac{x+3}{x-4}\right| = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-4} & \text{se } \dfrac{x+3}{x-4} \geq 0 \Rightarrow x \leq -3 \quad \vee \quad x > 4 \\ \\ -\dfrac{x+3}{x-4} & \text{se } \dfrac{x+3}{x-4} < 0 \Rightarrow -3 < x < 4 \end{cases}$$

A questo punto la disequazione di partenza può essere "spezzata" nei due sistemi:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-4} \geq 0 \\ \\ \dfrac{x+3}{x-4} < 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-4} < 0 \\ \\ -\dfrac{x+3}{x-4} < 1 \end{cases}$$

che diventano:

$$\begin{cases} x \leq -3 \quad \vee \quad x > 4 \\ \\ \dfrac{x+3}{x-4} - 1 < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -3 < x < 4 \\ \\ -\dfrac{x+3}{x-4} - 1 < 0 \end{cases}$$

e poi:

$$\begin{cases} x \leq -3 \quad \vee \quad x > 4 \\ \\ \dfrac{7}{x-4} < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -3 < x < 4 \\ \\ \dfrac{-2x+1}{x-4} < 0 \end{cases}$$

Con semplici calcoli si ottiene:

$$\begin{cases} x \leq -3 \quad \vee \quad x > 4 \\ \\ x < 4 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -3 < x < 4 \\ \\ x < \dfrac{1}{2} \quad \vee \quad x > 4 \end{cases}$$

cioè:

$$x \leq -3 \quad \vee \quad -3 < x < \frac{1}{2}$$

per cui la soluzione della disequazione di partenza è:

$$x < \frac{1}{2}$$

che è la stessa trovata nell'esercizio precedente.

Esempio 1.22 *Risolvere la disequazione:*

$$| x^2 - 7 | > -1$$

In questo caso è possibile osservare immediatamente che, poiché il valore assoluto di una certa espressione è, per definizione, non negativo, il primo membro è sempre ≥ 0, quindi sicuramente è maggiore di -1 e di conseguenza la disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

1.7. Disequazioni irrazionali

Le disequazioni irrazionali sono quelle nelle quali l'incognita compare sotto il segno di radice. Per la loro soluzione occorre distinguere il caso in cui l'indice della radice è dispari e il caso in cui l'indice è pari.

Se la radice presente nella disequazione è di indice n dispari si ottiene una disequazione equivalente a quella data elevando entrambi i membri alla potenza n; non sono necessarie altre condizioni perché una radice di indice dispari può avere il radicando di segno qualsiasi e può essa stessa assumere segno qualsiasi. Se le radici sono più di una, eventualmente con indici diversi (sempre dispari), si elevano entrambi i membri alle potenze opportune in modo da eliminare le radici.

Esempio 1.23 *Risolvere la disequazione:*

$$\sqrt[3]{x^2 - 9} \leq -2$$

In questo caso elevando entrambi i membri al cubo si ottiene:

$$x^2 - 9 \leq -8$$

e poi:

$$x^2 - 1 \leq 0$$

da cui:

$$-1 \leq x \leq 1$$

che è la soluzione della disequazione.

Esempio 1.24 *Risolvere la disequazione:*

$$\sqrt[3]{x+2} < \sqrt[9]{x^3+6x^2}$$

In questo caso elevando entrambi i membri alla nona si ottiene:

$$(x+2)^3 < x^3+6x^2$$

e poi:

$$x^3+6x^2+12x+8 < x^3+6x^2$$

da cui:

$$x < -\frac{2}{3}$$

che è la soluzione della disequazione.

Se la radice presente nella disequazione, invece, è di indice n pari, è possibile risolvere la disequazione utilizzando il seguente procedimento:

1. Si individua il campo di esistenza della radice (richiedendo che il radicando sia non negativo), quindi si discutono i segni dei due membri.

2. Se i due membri sono discordi si individuano subito i valori dell'incognita per i quali la disequazione è soddisfatta.

3. Se i due membri sono concordi (in particolare non negativi, in caso contrario si rendono non negativi moltiplicando entrambi i membri della disequazione per -1 e cambiando verso alla disuguaglianza) si elevano ad un'opportuna potenza in modo da eliminare le radici, quindi si risolve la disequazione.

4. Si considera l'unione delle soluzioni trovate ai punti 2) e 3).

Esempio 1.25 *Risolvere la disequazione:*

$$x - 4 \leq \sqrt{x}$$

Applicando il procedimento sopra descritto si ha:

a) Deve essere innanzitutto $x \geq 0$ (condizione di realtà della radice).

b) Se $x - 4 < 0$, cioè $x < 4$, i due membri sono discordi (il primo negativo, il secondo positivo o nullo) e la disequazione è sempre soddisfatta (in quanto una quantità negativa è sempre minore o uguale ad una quantità positiva o nulla), purché sia $x \geq 0$ (che è la condizione di realtà) e $x < 4$ (che individua l'intervallo che si sta prendendo in esame). Questa parte della disequazione ha quindi come soluzione:

$$0 \leq x < 4$$

c) Se $x - 4 \geq 0$, cioè $x \geq 4$, i due membri sono concordi (non negativi), si possono allora elevare al quadrato e la disequazione diventa:

$$(x - 4)^2 \leq x$$

cioè:

$$x^2 - 9x + 16 \leq 0$$

che ha soluzioni:

$$\frac{9 - \sqrt{17}}{2} \leq x \leq \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

purché sia $x \geq 0$ (che è la condizione di realtà) e $x \geq 4$ (che individua l'intervallo che si sta prendendo in esame). Questa parte della disequazione ha quindi come soluzione:

$$4 \leq x \leq \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

d) Combinando i risultati ottenuti ai punti b) e c) (cioè considerando la loro unione), infine, si ha che la disequazione considerata ha soluzione:

$$0 \leq x \leq \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

Esempio 1.26 *Risolvere la disequazione:*

$$2x + 6 \geq \sqrt{6x - 1}$$

a) Deve essere innanzitutto $6x - 1 \geq 0$, cioè $x \geq \dfrac{1}{6}$ (condizione di realtà della radice).

b) Se $2x + 6 < 0$, cioè $x < -3$, i due membri sono discordi (il primo negativo, il secondo positivo o nullo) e la disequazione non è mai soddisfatta (in quanto una quantità negativa non è mai maggiore o uguale ad una quantità positiva o nulla).

c) Se $2x + 6 \geq 0$, cioè $x \geq -3$, i due membri sono concordi (non negativi), si possono allora elevare al quadrato e la disequazione diventa:

$$(2x + 6)^2 \geq 6x - 1$$

cioè:

$$4x^2 + 18x + 37 \geq 0$$

che è sempre verificata, purché sia $x \geq \dfrac{1}{6}$ (che è la condizione di realtà) e $x \geq -3$ (che individua l'intervallo che si sta prendendo in esame). Questa parte della disequazione ha quindi come soluzione:

$$x \geq \frac{1}{6}$$

d) Combinando i risultati ottenuti ai punti b) e c), infine, si ha che la disequazione iniziale ha soluzione:

$$x \geq \frac{1}{6}$$

Esempio 1.27 *Risolvere la disequazione:*

$$\sqrt{x^2 - 4x - 12} < \sqrt{x + 2}$$

Si deve avere innanzitutto, per la condizione di realtà delle radici:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 12 \geq 0 \\ \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 6 \\ \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \quad \vee \quad x \geq 6$$

A questo punto si può osservare che sicuramente entrambi i membri della disequazione sono concordi (non negativi), in quanto si tratta di due radici ad indice pari, si possono allora elevare al quadrato ottenendo:

$$x^2 - 4x - 12 < x + 2$$

cioè:

$$x^2 - 5x - 14 < 0$$

che ha soluzione:

$$-2 < x < 7$$

Combinando questo risultato con la condizione di realtà si ha che la disequazione considerata ha soluzione:

$$6 \leq x < 7$$

Esempio 1.28 *Risolvere la disequazione:*

$$\sqrt[3]{x + x^2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}x}$$

a) Deve essere innanzitutto $x \geq 0$ (condizione di realtà della radice ad indice pari).

b) Se $x + x^2 < 0$, cioè $-1 < x < 0$, i due membri sono discordi (il primo negativo, il secondo positivo o nullo) e la disequazione è sempre soddisfatta (in quanto una quantità negativa è sempre minore o uguale ad una quantità positiva o nulla), purché sia $x \geq 0$ (che è la condizione di realtà) e $-1 < x < 0$ (che individua l'intervallo che si sta prendendo in esame). Queste sono però condizioni incompatibili, per cui in realtà in questo caso la disequazione non ha soluzioni.

c) Se $x + x^2 \geq 0$, cioè $x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 0$, i due membri sono concordi (non negativi), si possono allora elevare alla sesta e la disequazione diventa:

$$(x + x^2)^2 \leq \frac{1}{8}x^3$$

e poi:

$$x^4 + \frac{15}{8}x^3 + x^2 \leq 0$$

e infine:

$$x^2 \left(x^2 + \frac{15}{8}x + 1 \right) \leq 0$$

che è verificata solo per $x = 0$ (compatibile con la condizione di realtà $x \geq 0$ e con la condizione $x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 0$ che individua l'intervallo che si sta prendendo in esame).

d) Combinando i risultati ottenuti ai punti b) e c), infine, si ha che la disequazione iniziale ha soluzione:

$$x = 0$$

Nel caso di disequazioni con radici ad indice pari è anche possibile trasformare tali disequazioni in sistemi ad esse equivalenti. In particolare, considerando una disequazione del tipo:

$$A(x) \geq \sqrt{B(x)}$$

deve essere innanzitutto $B(x) \geq 0$ (condizione di realtà della radice) e anche $A(x) \geq 0$ (in quanto la radice a secondo membro è sicuramente non negativa, e quindi affinché la disequazione sia soddisfatta anche il primo membro deve essere non negativo), dopodiché è possibile elevare al quadrato entrambi i membri (che a questo punto sono sicuramente non negativi) allo scopo di eliminare la radice. La disequazione di partenza è quindi equivalente al sistema:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^2 \geq B(x) \end{cases}$$

Considerando invece una disequazione del tipo:

$$A(x) \leq \sqrt{B(x)}$$

deve essere innanzitutto $B(x) \geq 0$ (condizione di realtà della radice), se poi $A(x) \geq 0$ è possibile elevare al quadrato entrambi i membri (che in questo caso sono sicuramente non negativi) allo scopo di eliminare la radice, e la disequazione di partenza è soddisfatta dai valori di x che sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^2 \leq B(x) \end{cases}$$

nel quale la prima condizione è superflua in quanto è implicata dalla terza (infatti se $B(x) \geq [A(x)]^2$ allora sicuramente $B(x) \geq 0$). In questo caso, inoltre, la disequazione di partenza è verificata anche quando $A(x) < 0$ (perché una quantità negativa è sempre minore o uguale ad una quantità non negativa quale è $\sqrt{B(x)}$), quindi essa è soddisfatta anche dai valori di x che sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) < 0 \end{cases}$$

e, in definitiva, la disequazione di partenza equivale all'unione dei due sistemi:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^2 \leq B(x) \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) < 0 \end{cases}$$

In questi casi, quindi, data la disequazione iniziale è possibile innanzitutto scrivere il sistema (o i sistemi) ad essa equivalente, dopodiché la soluzione di questo sistema corrisponde a quella della disequazione di partenza.

Esempio 1.29 *Risolvere la disequazione:*

$$2x + 6 \geq \sqrt{6x - 1}$$

Questa disequazione (che è già stata risolta nell'Esempio 1.26) è scritta nella forma $A(x) \geq \sqrt{B(x)}$ ed equivale quindi al sistema:

$$\begin{cases} 6x - 1 \geq 0 \\ 2x + 6 \geq 0 \\ (2x + 6)^2 \geq 6x - 1 \end{cases}$$

dal quale si ottiene:

$$\begin{cases} 6x - 1 \geq 0 \\ 2x + 6 \geq 0 \\ 4x^2 + 18x + 37 \geq 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{6} \\ x \geq -3 \\ \forall x \end{cases}$$

e infine:

$$x \geq \frac{1}{6}$$

che è la soluzione della disequazione iniziale, e coincide con quella trovata in precedenza.

Esempio 1.30 *Risolvere la disequazione:*

$$x - 4 \leq \sqrt{x}$$

Questa disequazione (che è già stata risolta nell'Esempio 1.25) è scritta nella forma $A(x) \leq \sqrt{B(x)}$ ed equivale quindi all'unione dei due sistemi:

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ (x-4)^2 \leq x \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$

dai quali si ottiene:

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x^2 - 9x + 16 \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ \dfrac{9-\sqrt{17}}{2} \leq x \leq \dfrac{9+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 4 \end{cases}$$

e poi:

$$4 \leq x \leq \frac{9+\sqrt{17}}{2} \quad \vee \quad 0 \leq x < 4$$

e infine:

$$0 \leq x \leq \frac{9+\sqrt{17}}{2}$$

che è la soluzione della disequazione iniziale, e coincide con quella trovata in precedenza.

1.8. Disequazioni logaritmiche

Dati due numeri a, $b > 0$ (con $a \neq 1$) si definisce logaritmo in base a di b il numero c al quale si deve elevare a per ottenere b; si ha quindi:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Dalla definizione di logaritmo si ha allora:

$$\log_a a^b = b \qquad\qquad a^{\log_a b} = b$$

per cui un qualsiasi numero b può essere espresso attraverso il logaritmo in una qualsiasi base $a > 0$ (e diversa da 1) utilizzando una delle due relazioni viste (la seconda può essere utilizzata solo quando $b > 0$). I logaritmi soddisfano inoltre le seguenti proprietà:

(i) $\log_a 1 = 0 \quad \forall a > 0,\ a \neq 1$

(ii) se $0 < a < 1$ allora si ha $x < x' \Leftrightarrow \log_a x > \log_a x' \quad$ con $x,\ x' > 0$

(iii) se $a > 1$ allora si ha $x < x' \Leftrightarrow \log_a x < \log_a x' \quad$ con $x,\ x' > 0$

(iv) $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy) \quad$ con $x,\ y > 0$

(v) $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y} \quad$ con $x,\ y > 0$

(vi) $\log_a x^p = p \log_a x \quad$ con $x > 0$

(vii) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \quad$ con $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$

Le disequazioni logaritmiche sono quelle nelle quali l'incognita compare nell'argomento di un logaritmo. Per risolverle occorre innanzitutto richiedere che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo (condizione di realtà), dopodiché si sfruttano le proprietà sopra elencate per giungere alla soluzione.

Esempio 1.31 *Risolvere la disequazione:*

$$\log_{\frac{1}{2}} x < -3$$

Deve essere innanzitutto $x > 0$ (condizione di realtà del logaritmo), dopodiché (applicando semplicemente la definizione di logaritmo) si può scrivere:

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

cioè:

$$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 8$$

e infine (applicando la proprietà (*ii*) vista sopra – poiché la base del logaritmo in questo caso è minore di 1, per cui passando dalla disuguaglianza tra i logaritmi a quella tra i rispettivi argomenti il verso della disuguaglianza va rovesciato –):

$$x > 8$$

che è la soluzione della disequazione (essendo compatibile con la condizione di realtà $x > 0$).

Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando le proprietà degli esponenziali (elencate nel prossimo paragrafo); in questo caso si può scrivere innanzitutto (applicando ad entrambi i membri della disequazione di partenza l'esponenziale di base $\frac{1}{2}$, il che richiede di rovesciare la disuguaglianza poiché la base dell'esponenziale è minore di 1):

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

dopodiché si ha (applicando semplicemente la definizione di logaritmo per quanto riguarda il primo membro):

$$x > 8$$

che è la soluzione della disequazione (compatibile con la condizione di realtà $x > 0$).

Esempio 1.32 *Risolvere la disequazione:*

$$\log_2 x > 4$$

Deve essere innanzitutto $x > 0$ (condizione di realtà del logaritmo), dopodiché (applicando la definizione di logaritmo) si può scrivere:

$$\log_2 x > \log_2 (2)^4$$