Prefazione

È un fatto ormai arcinoto che la riforma dell'Università italiana abbia oltremodo compresso gli spazi riservati alla Matematica Finanziaria ed Attuariale nei Cordi di Laurea in Economia. L'esigenza di insegnare i concetti fondamentali e gli ulteriori sviluppi di tali discipline in un monte ore complessivo che oscilla fra le 60 e 70 unità in tre anni, induce alla predisposizione di strumenti didattici che, senza abbandonare il rigore formale, privilegino l'immediatezza e la sinteticità delle nozioni impartite agli Studenti.

Sulla base di tali considerazioni nasce il presente volume. Esso aspira a fornire agli Studenti di Economia un percorso omogeneo in cui le nozioni di base e i principali sviluppi della Matematica Finanziaria vengono proposti in forma semplice ma nel pieno rispetto del formalismo richiesto dalla disciplina. In questo senso il nostro maggior sforzo è stato quello di evidenziare le implicazioni pratiche di una materia che entra in modo oseremmo dire pervasivo nella maggior parte delle applicazioni di tipo economico, finanziario e aziendale.

Questo volume affronta i temi caratteristici della Matematica Finanziaria classica di base, coprendo in maniera essenziale i temi in cui lo strumento matematico viene utilizzato secondo un approccio totalmente deterministico.

Pur nella diversità delle opinioni individuali, gli autori si sono sforzati di adottare uno stile espositivo semplice per comunicare in modo diretto ed uniforme i contenuti matematici ritenuti essenziali in un corso di Matematica Finanziaria del secondo anno di Economia. Ci auguriamo che il risultato ottenuto costituisca un supporto didattico capace di non intimorire lo Studente ma, al contrario, di catturarne l'interesse per argomenti che, dietro allo sgradevole aspetto di tante formule, nascondono numerosi ed immediati riscontri nella prassi economica, finanziaria e aziendale quotidiana.

Gli autori

Capitolo 1

Le leggi di capitalizzazione

1.1 Introduzione

L'operazione finanziaria più semplice prevede lo scambio di due somme di denaro in due istanti diversi: il *capitale iniziale* C all'istante iniziale t_0 ed il *montante* (o *capitale finale*) M all'istante finale $t \geq t_0$. Chi impiega C a t_0 rinuncia alla sua disponibilità per tutta la *durata* $(t - t_0)$, per avere il montante M (normalmente $M > C$) alla scadenza t, momento in cui, oltre al capitale C, ha diritto anche all'*interesse* I (di norma positivo), cioè il compenso pattuito per la dilazione ottenuta nel restituire C

$$M = C + I.$$

Ovviamente, l'ammontare dell'interesse, e quindi del montante, dipende dall'en-

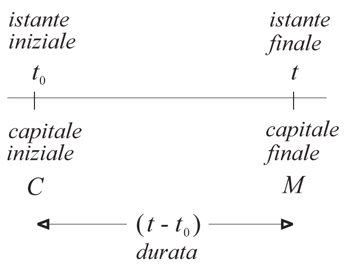

Figura 1.1: *Semplice operazione finanziaria*

tità del capitale C impiegato, dalla durata $(t - t_0)$ dell'impiego, dalle modalità di pagamento dell'interesse, dalla data t_0 di accensione del contratto e dalle condizioni finanziarie. Per ora ci limitiamo a considerare un'operazione finanziaria con interesse I globale, pagato interamente al termine dell'operazione, assieme al capitale C. Le parti possono accordarsi direttamente sull'entità del montante M, oppure definire una regola per calcolarlo a partire dalle tre grandezze C, t_0 e t.

Per districarci tra le infinite possibili funzioni che associano alla terna (C, t_0, t) il numero M, definiamo alcune "proprietà minimali" che il buon senso e/o il significato finanziario delle grandezze in gioco impone alle medesime leggi.

Chiamiamo *legge di capitalizzazione* ogni funzione

$$F(C, t_0, t)$$

che ci consenta di calcolare il montante $M = F(C, t_0, t)$, una volta noti il capitale iniziale C e le due epoche, iniziale t_0 e finale t e tale che valgano le seguenti 5 proprietà fondamentali:

1. $F(C, t_0, t)$ è definita per tutte le terne (C, t_0, t), con $C \geq 0$ e $t_0 \leq t \leq T$ (oppure $t_0 \leq t < T$, con T opportuna data estrema, finita o no, detta *orizzonte temporale*). Spesso ci si limita poi alle sole durate $(t - t_0)$ multiple di un certo intervallo temporale di ampiezza prescelta, per esempio il giorno.

2. $F(0, t_0, t) = 0$, nel senso che è nullo il montante ottenuto dall'impiego del capitale nullo.

3. $F(C, t_0, t_0) = C$, cioè se la durata dell'impiego è nulla, allora il montante è pari al capitale iniziale C.

4. $0 \leq C_1 < C_2 \Rightarrow F(C_2, t_0, t) > F(C_1, t_0, t)$: M è funzione strettamente crescente del capitale investito C, a parità di altre condizioni.

5. $C > 0$, $t_0 \leq t_1 < t_2 \Rightarrow F(C, t_0, t_2) > F(C, t_0, t_1)$: M è funzione strettamente crescente dell'epoca finale t, a parità di altre condizioni.

A queste 5 proprietà se ne possono aggiungere altre 3, che elenchiamo separatamente, per sottolineare che, nella pratica, esse sono spesso tradite:

6. $F(C_1 + C_2, t_0, t) = F(C_1, t_0, t) + F(C_2, t_0, t)$: il montante è additivo rispetto al capitale investito C;

7. $F(C, t_0, t) = C \times F(1, t_0, t)$: il montante è proporzionale al capitale investito;

8. fissato $C > 0$, $F(C, t_0, t)$ dipende solo da C e dalla durata $(t - t_0)$, quindi

$$F(C, t_0, t) = F(C, t_0 + h, t + h)\,,\ \forall h \text{ tale che } (t_0 + h)\,, (t + h) \in [0, T)\,,$$

e in particolare, con $h = -t_0$, $F(C, t_0, t) = F(C, 0, t - t_0)$.

Ad una ad una, esploriamo le 8 proprietà. La prima precisa l'insieme di definizione della nostra funzione. Nel calcolo di M le variabili delle quali teniamo conto sono, come già detto, soltanto C, t_0 e t. Ora, non v'è dubbio che una concreta legge di capitalizzazione può non soltanto dipendere dal capitale impiegato e dalle date d'impiego e di smobilizzo, ma anche tenere conto di molte altre variabili. Ci sono variabili in qualche misura accertabili a priori, come le condizioni economiche dei contraenti; altre vanno invece stimate, per esempio facendo previsioni su quelle che saranno le future condizioni del mercato dei capitali. Infine, potremmo chiamare in causa molte altre variabili che influiscono sulle condizioni di scambio di C a t_0 contro M a t. A questo punto ci troveremmo però con leggi che dipendono da tante variabili quanti sono i motivi che influenzano il calcolo del montante. Nel caso più semplice, una legge $F(C, t_0, t)$ è definita per tutte le terne (C, t_0, t), ovviamente con $C \geq 0$ e $t_0 \leq t \leq T$ (oppure $t_0 \leq t < T$), se a priori fissiamo una data estrema T. La data finale t non può precedere quella iniziale t_0, né tanto meno essere maggiore (oppure maggiore o uguale) alla data massima T. La data t potrebbe anche muoversi in un sottoinsieme proprio dell'intervallo $[t_0, T]$ o $[t_0, T)$, costruito con scadenze prestabilite, come avviene in tante forme di contratti bancari.

Le proprietà 2 e 3 si riferiscono ai cosiddetti *impieghi banali*, cioè quelli con capitale C nullo (per cui il montante è nullo) o per durate nulle (ottenendo interessi nulli).

Le proprietà 4 e 5 stabiliscono le ovvie monotonie della funzione F: un incremento nel capitale C tonifica il montante (proprietà 4), al pari di un incremento nella durata (proprietà 5), ovviamente *cœteris paribus*.

Dal "combinato disposto" delle proprietà 3 e 5 discende

$$C > 0, t > t_0 \Rightarrow M = F(C, t_0, t) > F(C, t_0, t_0) = C.$$

Le proprietà da 1 a 5 hanno validità piuttosto generale, anche se costituiscono talvolta un'astrazione dalla realtà: ad esempio, esse non tengono conto della presenza di vincoli sul capitale o sulla durata minimi o di costi accessori.

Le proprietà 6, 7 e 8 sono suggerite da esigenze pratiche e di semplificazione dell'analisi. Con la proprietà 6 diciamo che il montante del capitale $(C_1 + C_2)$ è pari alla somma dei montanti dei due capitali C_1 e C_2, impiegati in operazioni separate, beninteso con la stessa legge. La funzione montante è dunque additiva ed omogenea di 1° grado rispetto al capitale investito C, cioè è lineare nel medesimo. Infatti, la proprietà 7 evidenzia una proporzionalità tra M e il capitale C che lo genera. Accettiamo la proprietà pur essendo consapevoli che in molti impieghi la proporzionalità si salva soltanto a tratti, cioè quando il capitale C si muove all'interno di predefiniti intervalli.

La proprietà 8 afferma che fissato C, il montante dipende soltanto dalla durata dell'operazione. Dunque, visto che, a parità di durata, la data d'inizio non ha alcun effetto sul montante, poniamo $t_0 = 0$, e perciò $(t - t_0) = t$. In questo modo con la sola variabile t indichiamo sia la data di smobilizzo (disimpiego) che la durata dell'operazione.

1.2 Problemi di capitalizzazione

A questo punto sappiamo risolvere il problema più elementare di capitalizzazione. Siamo all'istante $t_0 = 0$ e, una volta scelta la legge di capitalizzazione $F(C, 0, t)$, ci chiediamo quale montante M verrà generato dal capitale C all'epoca t. Troviamo, grazie alle proprietà 7 e 8 del paragrafo 1.1,

$$M = F(C, 0, t) = CF(1, 0, t) .$$

Denotiamo con

$$f(t) = F(1, 0, t) \tag{1.2.1}$$

il montante a t di una unità di capitale impiegata a 0; la funzione $f(t)$ è detta *fattore* o *funzione di montante* o *di capitalizzazione*. Per fissare le idee, lo supporremo definito $\forall t \in [0, T)$, col che la (1.2.1) diventa

$$M = Cf(t) , \quad t \in [0, T) . \tag{1.2.2}$$

Il montante di un qualunque capitale C impiegato per un tempo t, si ottiene dunque moltiplicando l'importo del capitale C per il fattore di montante $f(t)$. Dalle proprietà sulla funzione $F(C, t_0, t)$ deriva che:

> Ogni funzione $f(t)$ definita per $t \in [0, T)$, strettamente crescente e con $f(0) = 1$ è adatta a descrivere un *fattore di montante* o *di capitalizzazione*.

Inoltre, sono rilevanti particolari famiglie di funzioni di capitalizzazione:

> L'insieme di tutti i fattori di capitalizzazione che tra loro differiscono soltanto per il diverso valore assegnato ad un comune parametro, viene detto *regime di capitalizzazione* o *famiglia di leggi di capitalizzazione*.

Un esempio è fornito dal *regime di capitalizzazione semplice*, del quale parleremo nel capitolo 2: esso comprende tutte le leggi lineari in t, cioè del tipo

$$f(t) = 1 + \alpha t, \quad t \in [0, T),$$

con $\alpha > 0$. Geometricamente, si tratta del fascio di semirette crescenti che escono dal punto $(t, f(t)) = (0, 1)$, con coefficiente angolare proprio pari ad α. È comune definire i regimi di capitalizzazione in modo tale che il parametro misuri il cosiddetto *tasso unitario di interesse*.

> Data una funzione di capitalizzazione $f(t)$, l'interesse prodotto nel primo periodo unitario (diciamo anno) da un capitale unitario (diciamo un Euro) è detto *tasso unitario di interesse* (o *rate of interest*) ed è pari a
> $$i = f(1) - 1. \tag{1.2.3}$$

Inoltre esistono altre nozioni di tasso di interesse:

- il *tasso di interesse sul capitale iniziale per l'intera durata*
$$\frac{I}{C} = \frac{M - C}{C} = \frac{M}{C} - 1 = \frac{Cf(t)}{C} - 1 = f(t) - 1;$$
- il *tasso medio per unità di tempo*
$$\frac{\frac{I}{C}}{t} = \frac{f(t) - 1}{t}.$$

Il binomio $(1 + i)$ è comunemente detto *binomio di capitalizzazione* e indicato col simbolo

$$u = 1 + i = f(1),$$

mentre, per il reciproco di u si utilizza il simbolo

$$v = \frac{1}{u} = u^{-1} = \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{1 + i} = (1 + i)^{-1}.$$

Ovviamente, prima di definire la legge $f(t)$ occorre scegliere l'unità di misura nella quale esprimere il tempo di impiego (l'anno, il semestre, la settimana, ecc.). In corrispondenza, il tasso unitario d'interesse i deve essere riferito all'unità temporale di misura scelta. Ad esempio, se t è misurato in anni, il corrispondente tasso unitario di interesse sarà un tasso anuo; se t è misurato in semestri, i sarà tasso semestrale, e via di questo passo.

Nel seguito, salvo avviso contrario, i capitali saranno espressi in Euro e le durate in anni, oppure in anni e frazioni di anno (esempio: esprimiamo 5 anni e 9 mesi come $\left(5+\frac{9}{12}\right)=5{,}75$ anni). Nella pratica, solitamente i assume valori positivi ma relativamente piccoli, per esempio $i=0{,}0375$. È quindi comune esprimere i tassi in termini percentuali, ad esempio:

$$i=0{,}0375=\tfrac{3{,}75}{100}=3{,}75\%.$$

La quantità $0{,}01=1\%$ è detta *punto percentuale* ed il suo centesimo $0{,}0001=0{,}01\%$ è detto *punto base* o *basis point*. Spesso occorre approssimare il valore del tasso; è prassi approssimare al punto base più prossimo, per esempio

$$i=\tfrac{1}{30}\simeq 3{,}33\%,\qquad i=\tfrac{1}{60}\simeq 1{,}67\%.$$

Esercizio 1.2.1 *Consideriamo la funzione*

$$f(t)=\left(\frac{2}{1-\frac{1}{2}k}\right)^{t}\qquad t\geq 0,\quad k \text{ costante assegnata.}$$

Per quali valori di k la funzione è fattore di montante?

La funzione è del tipo $f(t)=a^t$ con $a=\frac{2}{1-\frac{1}{2}k}$. Affinché sia definita deve essere $a>0$, cioè $k<2$. Per $t=0$, risulta $f(0)=1$ per ogni valore di $k<2$. Per essere funzione di montante occorre inoltre che sia crescente, cioè $a>1$, quindi $k>-2$; perciò dev'essere $-2<k<2$.

Esercizio 1.2.2 *La funzione*

$$f(t)=1-0{,}02t+0{,}05t^2,\quad t\geq 0$$

con t misurato in anni, è una legge di capitalizzazione?

Risulta $f(0)=1$, però $f'(t)=-0{,}02+0{,}1t$ è negativa per $0\leq t<0{,}2$. Dunque $f(t)$ non è sempre crescente, perciò non è una legge di capitalizzazione.

Esercizio 1.2.3 *La funzione $f(t)=e^{0{,}02+\delta t}$, $t\geq 0$, con $\delta=\ln(1+i)$ e $i=5\%$ è una legge di capitalizzazione?*

La funzione $f(t)$ non è legge di capitalizzazione, infatti $f(0)\neq 1$.

1.3 Problemi di attualizzazione

Quelli fin qui visti sono *problemi di capitalizzazione*: data la legge $f(t)$, si calcola il valore finale M *equivalente in termini finanziari* al capitale iniziale C. Rovesciando quest'ottica, otteniamo i cosiddetti *problemi di attualizzazione* nei quali ci chiediamo: quale capitale iniziale C (incognito) occorre impiegare all'istante $t_0 = 0$ per avere a t proprio il montante M (dato)? In questi problemi, dati M e $f(t)$, si calcola l'importo C che è equivalente (in termini finanziari) in 0 al capitale M. Formalmente, ciò vuol dire risolvere in C la (1.2.2):

$$C = M\frac{1}{f(t)}. \tag{1.3.1}$$

Posto poi, come per il seguito,

$$v(t) = \frac{1}{f(t)}, \tag{1.3.2}$$

si può scrivere

$$C = Mv(t).$$

Il capitale C è il *valore attuale* (cioè il valore al tempo 0 o *valore presente*, in inglese *present value*) del capitale M disponibile a t, e la funzione $v(t)$ serve proprio a trasferire (in termini finanziari) a 0 ciò che è collocato a t, sicché $v(t)$ è detta *fattore di attualizzazione*. *Attualizzare (o scontare) un capitale* futuro M riferito all'istante finale t significa calcolarne il suo valore attuale $C = Mv(t)$. La funzione $v(t)$ definita dalla (1.3.2) è detta *fattore di attualizzazione coniugato* del fattore di capitalizzazione $f(t)$; infatti risulta

$$f(t)\,v(t) = 1,\ \forall t \in [0, T),$$

dove $v(t)$ gode di proprietà derivanti da quelle di $f(t)$:

- $v(t)$ è definita $\forall t \in [0, T)$;
- $v(0) = 1$;
- $v(t) > 0$, $\forall t \in [0, T)$;
- $v(t)$ è strettamente decrescente rispetto a t, $\forall t \in [0, T)$.

Esercizio 1.3.1 *La funzione*

$$v(t) = \frac{2}{2 + 3t^2}, \quad t \geq 0,$$

può essere considerata un fattore di attualizzazione associato a qualche fattore di capitalizzazione $f(t)$?

Per $t = 0$, risulta $v(0) = 1$. La funzione $v(t)$ è positiva per ogni valore di t. Inoltre è derivabile, con derivata

$$v'(t) = \frac{-12t}{(2+3t^2)^2},$$

negativa per ogni valore di t. Dunque $v(t)$ è un fattore di attualizzazione a cui è associato il fattore di capitalizzazione

$$f(t) = \frac{1}{v(t)} = \frac{2+3t^2}{2} = 1 + \frac{3}{2}t^2, \quad t \geq 0.$$

1.3.1 Attualizzazione e sconto

Abbiamo definito il montante quale somma del capitale iniziale C e dell'interesse I che C produce in capo a t anni: $M = C + I$. Rovesciando il punto di vista, a partire da una somma futura M possiamo vedere in I ciò che va tolto ad M per determinare C:

$$C = M - I, \text{ cioè } I = M - C.$$

Vedendo le cose in questo modo, I viene detto *sconto* sul capitale finale M; inoltre, il capitale C, valore attuale del montante M, viene anche detto *somma scontata* o *netto ricavo* di quell'operazione ove si scambia il capitale futuro M in cambio dell'importo presente C. Proprio per sottolineare questa diversa impostazione, si usa spesso un diverso simbolo, cioè si scrive (anziché I) D (iniziale dell'inglese *discount* = sconto):

$$D = M - C,$$

e perciò, grazie alla (1.3.1)

$$D = M - \frac{M}{f(t)} = M\left(1 - \frac{1}{f(t)}\right) = M(1 - v(t)).$$

A questo punto, in analogia con quanto fatto per i problemi di capitalizzazione, definiamo il numero

$$d = \frac{D(1)}{M(1)},$$

detto *tasso unitario di sconto*: lo sconto relativo ad un capitale da scontare unitario per un tempo unitario. È facile verificare che

$$d = \frac{D(1)}{M(1)} = 1 - \frac{1}{f(1)} = 1 - v(1) = 1 - v = 1 - \frac{1}{u} = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = iv. \tag{1.3.3}$$

Possiamo anche calcolare il tasso di sconto sul capitale finale per l'intera durata t, cioè

$$\frac{D}{M} = \frac{M-C}{M} = 1 - \frac{C}{M} = 1 - \frac{Mv\left(t\right)}{M} = 1 - v\left(t\right),$$

e il corrispondente tasso medio di sconto per unità di tempo

$$\frac{\frac{D}{M}}{t} = \frac{1 - v\left(t\right)}{t}.$$

La differenza tra interesse e sconto deriva soltanto dall'adozione di diversi punti di vista; inoltre i tassi d'interesse i e di sconto d sono talmente vicini tra loro (soprattutto con tassi piccoli) che basta un attimo di distrazione per confonderli. Per evitare questo rischio basta tenere presente che i è l'interesse prodotto nel primo anno da un Euro di capitale *iniziale*, mentre d è lo sconto da togliere ad un Euro di capitale *finale* previsto al termine del primo anno. È dunque ovvio che risulti $i \neq d$, addirittura $i > d$. Infatti, per la (1.3.3) risulta $d = iv$, e sapendo che $0 \leq v \leq 1$, otteniamo

$$\begin{cases} d = iv \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases} \Rightarrow i > d > 0.$$

Inoltre, essendo $i > 0$, possiamo ricavare quanto segue

$$i = \left(1+i\right)d > d, \qquad d = \frac{i}{1+i}, \; i = \frac{d}{1-d} \text{ (con } d < 1\text{)}.$$

1.3.2 Valutazione ad una qualunque epoca

Nei problemi di capitalizzazione si calcola il montante M all'epoca t generato dal capitale iniziale C che entra nell'operazione a $t_0 = 0$. In quelli di attualizzazione si calcola invece il valore attuale di M, cioè il capitale C che, impiegato da t_0 a t, genera proprio il montante M. Nulla vieta di chiederci quale montante K verrà prodotto all'epoca t_2 dal capitale H impiegato all'epoca t_1, ovviamente con $0 \leq t_1 < t_2 < T$. La risposta è ovvia:

$$K = Hf\left(t_2 - t_1\right)$$

e in questo contesto K è il montante all'epoca t_2 di H, mentre H è il valore all'epoca t_1 del capitale K esigibile all'epoca t_2:

$$H = \frac{K}{f\left(t_2 - t_1\right)}.$$

1.4 Leggi scindibili

Se impieghiamo il capitale C da 0 a t, otteniamo il montante $M = Cf(t)$. Supponiamo ora di interrompere l'impiego all'istante t', con $0 < t' < t$. A t' otteniamo il montante intermedio $M' = Cf(t')$. Reimpiegando subito M' per la durata residua $(t - t')$, alla fine, cioè all'epoca t, otterremo il montante

$$C\left[f\left(t'\right)f\left(t-t'\right)\right],$$

che può essere uguale a $Cf(t)$, oppure no, nel qual caso l'interruzione dell'impiego a t', anche se subito seguita dal reimpiego del montante intermedio per tutta la durata residua, altera il montante finale. Ebbene, per alcune leggi questo secondo caso non si presenta mai, perché con esse si ottiene lo stesso montante sia interrompendo l'impiego e subito rinnovandolo col reimpiego del montante intermedio, sia lasciando correre l'impiego da 0 fino alla data finale t. Queste leggi $f(t)$ si dicono *leggi scindibili* (*per prodotto nel senso del Cantelli*), perché godono della seguente proprietà:

$$\forall\left(t',t\right): 0 \leq t' \leq t \Rightarrow f\left(t'\right)f\left(t-t'\right) = f(t), \tag{1.4.1}$$

detta *scindibilità* proprio perché la scissione dell'intervallo di impiego $[0,t]$ nei due sub-intervalli adiacenti $[0,t']$ e $[t',t]$ non altera mai il montante finale. Quando si ha a che fare con leggi scindibili è nullo l'effetto provocato sul montante finale dall'interruzione dell'impiego, qualunque scelta si faccia sia sulla durata complessiva t, sia sull'istante intermedio t' di interruzione e reimpiego. Ad esempio, $f(t) = 1{,}05^t$ è scindibile (per rendersene conto basta usare un'arcinota proprietà delle potenze), mentre $f(t) = (1 + 0{,}05t)$ non lo è (basta fare i conti per convincersene). Si può provare che sono scindibili tutte e sole le leggi esponenziali, cioè del tipo $f(t) = (1+i)^t$, con $i > 0$.

1.5 Intensità istantanea di interesse

Consideriamo una legge di capitalizzazione $f(t)$, continua assieme alla sua derivata prima $f'(t) = \mathrm{d}f(t)/\mathrm{d}t$ rispetto a t, per quei t che ci interessano. Incrementando la durata da t a $(t+h)$, il montante passa da $f(t)$ a $f(t+h)$. A conti fatti, nell'intervallo $[t, t+h]$ il montante subisce l'incremento

$$f(t+h) - f(t),$$

che possiamo considerare quale interesse prodotto da $f(t)$ nello stesso intervallo. Grazie alle ipotesi di regolarità assunte su $f(t)$, possiamo usare il *teorema del* *differenziale*: esiste un numero $z(h)$, infinitesimo con h, per il quale si ha:

$$f(t+h) - f(t) = \left[f'(t) + z(h)\right] h = f'(t)\,h + z(h)\,h. \tag{1.5.1}$$

Definiamo ora la cosiddetta *intensità istantanea d'interesse* (o *forza d'interesse*, detta talvolta in modo improprio anche *tasso istantaneo d'interesse*)

$$\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}, \quad \text{cioè} \quad \delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln f(t). \tag{1.5.2}$$

È così possibile riscrivere la (1.5.1) nella forma

$$f(t+h) - f(t) = \left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) f(t)\,h + z(h)\,h = f(t)\,\delta(t)\,h + z(h)\,h$$

ed osservare che l'incremento registrato dal fattore di montante nell'intervallo $[t, t+h]$ è pari al prodotto tra il montante $f(t)$ già raggiunto in t, l'intensità $\delta(t)$ e l'ampiezza h dell'intervallo, a meno della quantità $z(h)\,h$, infinitesimo di ordine superiore al 1° rispetto ad h (risulta difatti $\lim_{h\to0} \frac{z(h)\,h}{h} = \lim_{h\to0} z(h) = 0$). Mentre la velocità di accrescimento del montante $f(t)$ al tempo t è espressa da $f'(t)$, l'intensità d'interesse $\delta(t)$ misura la velocità di accrescimento **relativo**, cioè rapportata al montante $f(t)$ medesimo.

Osserviamo che, nell'ambito dei fattori di capitalizzazione $f(t)$ dotati di derivata prima continua, la scindibilità equivale al fatto che l'intensità d'interesse $\delta(t)$ è costante al variare della durata t:

$$f(t) \text{ scindibile} \Leftrightarrow \delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} \text{ costante con } t, \forall t.$$

Per quei fattori $f(t)$, questa relazione costituisce allora un vero e proprio test di scindibilità, nel senso che essa vale se e solo se vale la (1.4.1).

Esercizio 1.5.1 *Calcoliamo l'intensità istantanea di interesse per $t = 2$ della funzione di capitalizzazione*

$$f(t) = 1{,}02^t\,(1 + 0{,}02t)\,,\ t \geq 0.$$

È scindibile?

L'intensità istantanea di interesse di $f(t)$ è

$$
\begin{aligned}
\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} &= \frac{1{,}02^t (\ln 1{,}02)(1+0{,}02t) + 0{,}02 \times 1{,}02^t}{1{,}02^t (1+0{,}02t)} = \\
&= \frac{(\ln 1{,}02)(1+0{,}02t) + 0{,}02}{1+0{,}02t};
\end{aligned}
$$

per $t = 2$, risulta $\delta(2) \simeq 3{,}90\%$. La funzione $\delta(t)$ è continua per $t > 0$, ma dipende da t: la funzione $f(t)$ non è scindibile.