Premessa

Il manuale si rivolge agli studenti di Economia ed è una raccolta di esercizi completamente risolti o da risolvere e di tracce assegnate negli anni nella Facoltà di Economia dell'Università di Foggia nei corsi di Matematica per l'economia e di Metodi matematici per l'economia.

Per i riferimenti teorici è possibile far riferimento a "Lezioni di Matematica per l'Economia e la Finanza", Lulu Press, Inc – Raleigh, NC, ISBN: 978-1-326-75505-8 di L. Grilli, M. Bisceglia (2016).

Ringrazio coloro che vorranno segnalarmi qualche inevitabile refuso.

Lucia Maddalena

1 Spazi vettoriali

1. *Quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali?*

   i) *L'insieme $M'(2,2)$ delle matrici reali del tipo 2×2, che abbiano determinante uguale a zero.*

   ii) *L'insieme $L([0,1]) = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ limitata}\}$.*

   Le operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare sono quelle che naturalmente si definiscono per le funzioni.

   iii) *L'insieme delle soluzioni x di un sistema lineare $Ax = b$* con $A \in M(m,n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

   Soluzione:

   i) Verifichiamo le due condizioni. Se $a \in \mathbb{R}$ e $A \in M'(2,\,2)$ allora $|A| = 0$.

$$a \cdot A \in M(2,\,2), \quad |a \cdot A| = a^2\,|A| = a^2\,0 = 0$$

   e quindi $a \cdot A \in M'(2,\,2)$

   Non è vero in generale che $|A + B| = |A| + |B|$. Infatti se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   risulta $|A + B| = 1$ ma $|A| + |B| = 0$

   Quindi non è vero che la somma di due matrici con determinante nullo è una matrice con determinante nullo. $M'(2,2)$ non è un sottospazio vettoriale di $M(2,2)$.

ii) Basta osservare che $\forall\, f,\, g\ :\ [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\inf f + \inf g \leq f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g,\ \ \forall\, x \in [0,1],$$

inoltre

$$a\ \inf f \leq a\, f(x) \leq a \sup f \quad \forall\, x \in [0,1].$$

per ogni $a \in \mathbb{R}_+$, e

$$a\ \sup f \leq a\, f(x) \leq a \inf f \quad \forall\, x \in [0,1]$$

per $a \in \mathbb{R}$.

Quindi la somma di due funzioni limitate è una funzione limitata e il prodotto di un numero per una funzione limitata è una funzione limitata.

iii) Siano $x,\, x^{'} \in \mathbb{R}^n$ soluzioni del sistema di equazioni lineari $Ax = b$

$$A(x + x^{'}) = Ax + Ax^{'} = b + b = 2b \neq b.$$

Per cui, il sottoinsieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ non è un sottospazio lineare.

2. *Quali degli insiemi $S^{'}$ sono sottospazi vettoriali di S :*

i) $S = M(1,2)$ *e* $S^{'}$ *è il sottoinsieme delle matrici della forma* $(a^2\ a)$ *con* $a \in \mathbb{R}$.

ii) $S = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid\ f$ *continua*$\}$ *e* $S^{'}$ *è l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili.*

iii) $S = P(\mathbb{R})$ *è l'insieme dei polinomi e* $S^{'}$ *è l'insieme dei polinomi* p *tali che* $p(1) = 0$.

Soluzione:

i) No. Infatti, siano $A = (a^2\, a)$ e $B = (b^2\, b)$ con $a,\, b \in \mathbb{R}^*$. Risulta:

$$A + B = (a^2 + b^2 \quad a + b) \neq (a^2 + b^2 + 2\,a\,b \quad a + b) = ((a + b)^2\,(a + b))$$

ii) Sì. Poiché la somma di funzioni infinitamente derivabili è infinitamente derivabile e il prodotto di una funzione infinitamente derivabile per una costante è infinitamente derivabile.

iii) Sì. Poiché se p e q sono polinomi tali che $p(1) = 0$ e $q(1) = 0$, $(p + q)(1) = p(1) + q(1) = 0$ e $a\,p(1) = a \cdot 0 = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

3. *In ciascuno dei seguenti casi determinare se il sottoinsieme S' dello spazio vettoriale S è formato da vettori linearmente indipendenti:*

i) $S = \mathbb{C}^3$ e $S' = \{(-1, 2, i),\, (1, 3 + i, -2),\, (-5, 3i, -6 + 2i)\}$.

ii) $S = P(\mathbb{R})$, l'insieme dei polinomi e $S' = \{x - 1,\, x^2 + 1,\, x^3 - x^2 - x + 3\}$.

iii) $S = M(2, 2)$ e

$$S' = \left\{ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 12 & -7 \\ 17 & 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soluzione:

i) Sì. Il sistema $c_1\, v_1 + c_2\, v_2 + c_3\, v_3 = 0$ con

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ i \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 + i \\ -2 \end{pmatrix} \text{ e } v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3i \\ -6 + 2i \end{pmatrix},$$

nelle incognite c_1, c_2, c_3 ha il determinante della matrice dei coefficienti

dato da:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 2 & 3+i & 3i \\ i & -2 & -6+2i \end{vmatrix} = 44 + 5i \neq 0$$

e quindi l'unica soluzione è $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

ii) Sì. Siano $c_i \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 1, 2, 3$. Supponiamo che

$$c_1(x-1) + c_2(x^2+1) + c_3(x^3 - x^2 - x + 3) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dopo brevi passaggi, risulta

$$c_3x^3 + (c_2 - c_3)x^2 + (c_1 - c_3)x - c_1 + c_2 - 3c_3 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e, per il principio di identità dei polinomi, dovranno essere i coefficienti del polinomio tutti nulli. Uguagliando i coefficienti a zero si ha:

$$\begin{cases} -c_1 + c_2 - 3c_3 = 0 \\ c_1 - c_3 = 0 \\ c_2 - c_3 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

e, facilmente,

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0. \end{cases}$$

iii) No. Si verifica facilmente che

$$C = c_1 A + c_2 B$$

ammette come soluzioni $c_1 = 3$ e $c_2 = 2$.

Quindi, uno dei tre elementi, C, è uguale ad una combinazione lineare degli altri due, A e B, con una opportuna scelta dei coefficienti non nulli c_1 e c_2.

4. *Stabilire se i vettori* $(1,2,3)$, $(0,0,1)$ *e* $(3,2,1)$ *sono linearmente indipendenti.*

Soluzione:

Posto $A = (v_1|v_2|v_3)$ con $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

poiché il $\det A \neq 0$ i vettori sono linearmente indipendenti.

5. *Un sottoinsieme di uno spazio vettoriale che contenga il vettore nullo può essere un parte libera?*

Soluzione:

La risposta è negativa. Infatti, se $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ è una parte libera di S e ipotizziamo che per qualche $i = 1, \ldots.., n$, $x_i = 0$ risulta che $0x_1 + 0x_2 + ... + 1x_i + ...0x_n = 0$, si ha quindi una combinazione lineare nulla con i coefficienti non tutti nulli.

6. *Sono indipendenti i vettori* $(1,0,0,0,0)$, $(0,1,0,0,0)$, $(0,4,1,2,3)$, $(0,5,1,2,3)$*? Qual è la dimensione del sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^5$ *generato da questi vettori?*

Soluzione.

Poiché la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ha le ultime tre righe proporzionali tra di loro, il suo rango dovrà essere ≤ 3.

Inoltre, poiché

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

il rango di A è 3.

I vettori non sono linearmente indipendenti e la dimensione dello spazio da essi generato è 3.

7. *L'unione di due sottoinsiemi di vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale è costituito da vettori linearmente indipendenti?*

Soluzione:

La risposta è negativa.

Infatti se per esempio poniamo $X = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $Y = \{(0, 1), (1, 1)\}$ notiamo che mentre X e Y sono costituiti da vettori linearmente indipendenti l'unione $X \cup Y = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ non è costituita da vettori linearmente indipendenti.

8. *Sia S uno spazio vettoriale e $X \subseteq S$.*

i) *Se X è costituito da vettori linearmente indipendenti ogni suo sottoinsieme è anche costituito da vettori linearmente indipendenti?*

ii) *Se X è costituito da vettori linearmente dipendenti ogni sottoinsieme è anche costituito da vettori linearmente dipendenti?*

iii) *Se u e v, v e w, w e u sono linearmente indipendenti a coppie allora u, v e w sono linearmente indipendenti?*

Soluzione:

i) La risposta è affermativa. Sia $X = \{x_1, \dots x_n\}$ e supponiamo $Y \subseteq X$ e $Y = \{x_1, \dots x_k\}$ con $k < n$. Se $\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = 0$ con $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$, si ottiene
$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i + 0x_{k+1} + \dots 0x_n = 0.$$
Poiché X è una parte libera allora $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. Quindi, Y è una parte libera.

ii) In generale, la risposta è negativa.

Infatti, si consideri $X = \{(1,0,0),\ (2,0,0),\ (1,1,0)\}$ parte non libera di $\mathbb{R}^3$ e $Y = \{(1,0,0),\ (1,1,0)\} \subset X$ che è, invece, parte libera in $\mathbb{R}^3$.

iii) No. Infatti i vettori $u = (1,0), v = (0,1), w = (1,1)$ sono linearmente indipendenti se scelti a due a due; ma sono linearmente dipendenti tutti e tre.

9. *Dimostrare che i vettori* $(4,2,1)$, $(-5,2,-3)$ *e* $(1,3,0)$ *formano una base di* $\mathbb{R}^3$.

   Soluzione:

   Costruiamo la matrice A dei vettori colonna

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1}$$

   I vettori sono linearmente indipendenti e, pertanto, formano una base di $\mathbb{R}^3$.

10. *Determinare due vettori unitari ed ortogonali ai seguenti vettori* $u_1 = (-2,\ 3,\ -1)$ *e* $u_2 = (1,\ 1,\ 1)$.

    Soluzione:

    Si cercano dei vettori $x = (x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{R}^3$ tali che soddisfino le seguenti relazioni

$$(x|u_1) = 0 \quad \text{e} \quad (x|u_2) = 0.$$

    Condizioni che con semplici calcoli danno il sistema

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

    Il sistema lineare risulta essere omogeneo e indeterminato. Infatti, il rango della matrice dei coefficienti è pari a 2. Per il Teorema di Rouché-Capelli, il