Capitolo 1

Elementi di Logica

«*Né la contraddizione è indice di falsità né la coerenza è segno di verità.*»
Blaise Pascal (matematico, fisico, filosofo e teologo, 1523-1662)

«*Noi non diamo leggi all'intelletto né assegnamo leggi alle cose in base al nostro giudizio, piuttosto raccogliamo e descriviamo come degli scriba pieni di fede quelle leggi che sono nate nella voce della Natura e sono da questa stessa proclamate.*»
Georg F.L.P. Cantor (matematico, 1845-1918)

«*L'esperienza resta naturalmente l'unico criterio per utilizzare una costruzione matematica per la fisica; ma è nella matematica che si trova il principio veramente creatore.*»
Albert Einstein (fisico, 1879-1955)

«*È stato confrontandomi con gli enigmi che ci circondano e considerando e analizzando le osservazioni da me fatte, che sono giunto alla matematica. Sebbene mi possa davvero considerare digiuno di esperienza e consuetudine con le scienze esatte, spesso mi sembra di avere molte più cose in comune con i matematici che con i miei discepoli artisti.*»
Maurits C. Escher (artista e grafico, 1898-1972)

«*Il matematico gioca un gioco in cui egli stesso inventa le regole. Il fisico gioca un gioco in cui le regole sono fornite dalla Natura. Ma, con il passare del tempo, diventa sempre più evidente che le regole che il matematico trova interessanti sono quelle che la Natura ha scelto.*»
Paul A.M. Dirac (fisico e matematico, 1902-1984)

1.1 Teoria

In questo capitolo si forniscono alcune nozioni basilari di logica matematica. La trattazione dell'argomento è volutamente semplificata (nonché, a volte, necessariamente imprecisa) nel tentativo di mantenere l'esposizione ad un livello quanto più elementare possibile. L'obiettivo è quello di fornire al lettore alcuni strumenti necessari ad affrontare in modo sistematico lo studio degli argomenti di Matematica Generale. Pertanto, si accennano soltanto alcune nozioni fondamentali di logica matematica, come quelle di *sintassi* (ossia le regole di composizione) e di *semantica* (ossia il significato) di un *linguaggio simbolico*. Inoltre, si utilizzano in modo intuitivo alcune nozioni matematiche elementari, quali quelle di insieme, elemento, appartenenza, numero, etc. (Tali nozioni saranno trattate in modo più formale nel Capitolo di Insiemistica.)

La comprensione delle nozioni esaminate in questo capitolo è necessaria per una solida formazione matematica. Questa è la ragione per cui dedichiamo molto spazio (anche se manca un altrettanto ampio rigore formale) alla trattazione di alcuni concetti che vengono utilizzati in modo sistematico nei quattro volumi, accompagnandoli con molti esempi illustrativi delle loro modalità di applicazione. La conoscenza del significato di *connettivo logico*, *quantificatore*, *definizione*, *dimostrazione*, *teorema*, *assioma*, *condizione necessaria e sufficiente*, *controesempio*, etc. è un prerequisito imprescindibile per la comprensione di tutti i concetti matematici, nonché per una loro corretta conversione in nozioni formali mediante l'utilizzo di un linguaggio simbolico.

Avvertiamo il lettore che, per motivi di spazio nonché in relazione agli obiettivi precipui di questi testi, si è spesso privilegiato un approccio intuitivo alle nozioni di logica piuttosto che una loro rigorosa trattazione formale. Infatti, sarebbe necessario un intero volume per descrivere, peraltro in modo non approfondito, le problematiche connesse alla formalizzazione simbolica di alcuni concetti. Il famoso (nonché famigerato) **paradosso del mentitore** illustra in modo lapidario le difficoltà che si nascondono negli anfratti di una trattazione logica di carattere formale: la locuzione "*Questa frase è falsa*" è vera o falsa?[1]

[1] Esistono varie versioni del paradosso del mentitore, elaborate da **Eubulide di Mileto** (IV secolo A.C.), **Aristotele** (IV secolo A.C.), **Diogene Laerzio** (II secolo D.C.), **Jean Buridan** (1292-1360), **Miguel de Cervantes** (1547-1616), **Philip Jourdain** (1879-1919). La versione originaria del paradosso è attribuita al filosofo **Epimenide di Creta** (VI secolo A.C.). Il paradosso del mentitore può essere "risolto" in vari modi: possibili soluzioni sono state proposte da tanti studiosi, ad esempio Aristotele, **Crisippo** (III secolo A.C.), **Guglielmo di Ockham** (1288-1349), Jean Buridan, etc. Tali soluzioni richiedono a volte il ricorso a nozioni teoriche di una certa complessità concettuale, quali quelle di *metalinguaggio*, *logiche temporali*, *logiche a più valori*, etc.

1.1.1 Sintassi

Gli elementi di un linguaggio simbolico sono i seguenti:

- **alfabeto**: un insieme finito di simboli;
- **stringhe**: le sequenze finite di elementi dell'alfabeto;
- **termini**: le stringhe aventi una particolare forma e a cui si decide di attribuire rilevanza semantica;
- **formule o proposizioni logiche**: le sequenze finite di termini ottenute mediante connettivi logici e quantificatori.

A titolo di esempio, consideriamo come linguaggio simbolico la "lingua italiana". In questo caso si ha:

- alfabeto: l'insieme $\{a, b, c, \ldots, z\}$;
- stringhe: tutte le sequenze finite di simboli dell'alfabeto, ad esempio "ahshalat", "apoftegma", "abbcccddddeeeee", "mementoauderesemper";
- termini: tutte le stringhe che sono presenti in un dizionario della lingua italiana (ed in testi specialistici);
- formule: le sequenze finite di parole formate secondo le regole grammaticali della lingua italiana, ad esempio "apoftegma", "il sole beve automobili", "Catania è la capitale del Brasile".

Si noti che ai fini della formazione delle formule si prescinde totalmente dal loro significato nonché dal loro valore di verità.

1.1.2 Connettivi e quantificatori

I connettivi e i quantificatori sono utilizzati per "creare nuovo dal vecchio". Specificamente:

- i connettivi sono degli "operatori" che si usano per ottenere formule nuove da formule preesistenti, elaborandole in vario modo; essi hanno come oggetto una formula (connettivi *unari*) o due formule (connettivi *binari*);[2]

[2] Il concetto di "operatore" unario, binario, ternario, etc. è trasformato in nozioni logico-matematiche secondo modalità che dipendono dal campo in cui esso viene applicato. Ritroveremo tale concetto, formalizzato in modi diversi, nella trattazione di: (i) *insiemi* (unione, intersezione, differenza, prodotto cartesiano, potenza di insiemi); (ii) *funzioni* (somma, prodotto, differenza, quoziente, composizione di funzioni); (iii) *matrici* (somma, differenza, prodotto, inversione, trasposizione); (iv) *strutture algebriche* (operazione binaria interna, operazione binaria esterna); etc.

- i quantificatori si utilizzano per ottenere formule nuove da formule preesistenti mediante l'utilizzo di "variabili"; tali variabili possono assumere valori in un determinato "universo".

I connettivi e i quantificatori utilizzati sono i seguenti:

- **connettivi unari**: *negazione* "$\neg$";
- **connettivi binari**:
  - *unione logica* "$\vee$" (informalmente detta "o"),
  - *intersezione logica* "$\wedge$" (informalmente detta "e"),
  - *implicazione* "$\Rightarrow$",
  - *doppia implicazione* o *equivalenza* "$\Leftrightarrow$";
- **quantificatori**:
  - *esistenziale* "$\exists$" (leggasi: "esiste almeno un"),
  - *universale* "$\forall$" (leggasi: "per ogni").

A rigore dovremmo distinguere tra **logica proposizionale** (che usa i connettivi ma non i quantificatori), **logica del primo ordine** (che utilizza anche i quantificatori, anche se con certe limitazioni), **logica del secondo ordine** (che utilizza i quantificatori in modo più ampio), etc. Tuttavia, per semplificare la trattazione, eviteremo qualsiasi esplicito riferimento a tale distinzione.

Illustriamo con un esempio la costruzione di nuove formule da formule preesistenti mediante l'utilizzo di connettivi. Se A e B sono due formule, allora da esse si possono creare nuove formule come segue:

- $\neg A$, $\neg B$, $A \wedge B$, $B \wedge A$, $A \vee B$, $B \vee A$, $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$, $B \Leftrightarrow A$
- $\neg(\neg A)$, $\neg A \Rightarrow B$, $\big((A \Leftrightarrow B) \Rightarrow A\big) \Rightarrow \big(\neg A \wedge \neg(\neg(\neg B))\big)$
- $\big((A \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow A)\big) \Rightarrow A$, $B \vee \big((A \vee B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)\big)$.

Si noti che l'uso delle parentesi è necessario per determinare l'ordine in cui i connettivi binari sono utilizzati: ad esempio, le due formule "$(A \Rightarrow A) \Rightarrow A$" e "$A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$" sono diverse.

Nel caso della lingua italiana, dalle proposizioni logiche "Peter abita a Toronto" e "il potere logora chi non lo possiede" si possono creare le nuove formule "Peter abita a Toronto *e* il potere logora chi non lo possiede" oppure "*se* Peter abita a Toronto, *allora* il potere logora chi non lo possiede", etc. Il fatto che alcune di tale formule non abbiano alcun significato nel senso comune è al momento irrilevante, in quanto ci stiamo occupando di sintassi e non di semantica.

Formule generiche in cui sono presenti i quantificatori sono le seguenti

$$\forall\, x \in X \;\; P(x) \tag{1.1}$$

$$\exists\, x \in X \;\; P(x) \tag{1.2}$$

che si leggono, rispettivamente:[3]

(1.1) "comunque si prenda un elemento x appartenente all'insieme X, vale $P(x)$"

(1.2) "esiste un elemento x appartenente all'insieme X per cui vale $P(x)$".

In tali formule, $P(x)$ è un'asserzione, espressa in linguaggio simbolico, che predica dell'elemento/variabile x (appartenente all'insieme/universo X). Per alcune formule in cui è presente il quantificatore esistenziale, talvolta si usa la notazione " $\exists!$ " che si legge: "esiste esattamente un".

Nel caso della lingua italiana, le seguenti proposizioni logiche utilizzano i quantificatori, nonostante ad una prima lettura non ci sia alcun riferimento esplicito ad essi:

(a) "tutti gli uomini sono mortali"

(b) "esiste una tigre di colore viola".

Una formalizzazione simbolica delle proposizioni (a) e (b) rivela che la (a) è di tipo (1.1), mentre la (b) è di tipo (1.2). Invero, denotati con U l'insieme degli uomini, con T l'insieme delle tigri, con $M(u)$ il predicato che sta per "u è mortale", e con $V(t)$ il predicato che sta per "t è viola", la (a) e la (b) si scrivono, rispettivamente:

(a′) $\forall\, u \in U \;\; M(u)$

(b′) $\exists\, t \in T \;\; V(t)$.

Si noti che la naturale (*sic*!) ambiguità (nonché ricchezza) della lingua italiana – ed in generale di tutti i linguaggi non simbolici – non consente un'immediata traduzione simbolica di tutte le asserzioni formulabili. Ad esempio, per poter scrivere in modo simbolico l'asserzione

(c) "un uomo è più intelligente di una scimmia"

[3] Il simbolo "$\in$" si legge "appartenente a"

occorre prima capire quale sia il suo vero significato, ossia se si intenda (magari ironicamente):

(c1) "qualche uomo è più intelligente di qualche scimmia", oppure

(c2) "qualche uomo è più intelligente di tutte le scimmie", oppure

(c3) "tutti gli uomini sono più intelligenti di tutte le scimmie", oppure

(c4) "tutti gli uomini sono più intelligenti di qualche scimmia",

visto che la (c1), la (c2), la (c3) e la (c4) hanno un'attribuzione semantica completamente diversa.[4] Denotato con S l'insieme delle scimmie e con $I(u, s)$ il predicato "u è più intelligente di s", le asserzioni (c1), (c2), (c3) e (c4) si scrivono, rispettivamente:

(c1′) $\exists\, u \in U \quad \exists\, s \in S \quad I(u, s)$

(c2′) $\exists\, u \in U \quad \forall\, s \in S \quad I(u, s)$

(c3′) $\forall\, u \in U \quad \forall\, s \in S \quad I(u, s)$

(c4′) $\forall\, u \in U \quad \exists\, s \in S \quad I(u, s).$

1.1.3 Semantica

I **valori di verità** che una formula può assumere sono "vero" ("V") oppure "falso" ("F").[5] I valori di verità delle formule composte in cui sono presenti connettivi logici dipendono dai valori di verità delle proposizioni logiche che le compongono secondo la seguente **tavola di verità**, ove A e B sono arbitrarie proposizioni logiche:

[4] Poiché stiamo trattando la sintassi del linguaggio, non avremmo dovuto scomodare la sua semantica, ma lo facciamo nel tentativo di rendere l'esempio meno oscuro.

[5] Per la precisione, esistono anche casi in cui il valore di verità di una formula non è esattamente 0 (ossia "F") oppure 1 (ossia "V"), potendo essere un qualunque numero tra 0 e 1. Si pensi, ad esempio, ad una proposizione del tipo "Gianfranco è alto". Se Gianfranco è alto 1.55m oppure 1.95m, allora la locuzione ha valore di verità, rispettivamente, 0 (ossia "F") e 1 (ossia "V"). Tuttavia, se Gianfranco è alto 1.75m, allora la locuzione in esame avrà probabilmente un grado di verità parziale, situazione codificata mediante un numero compreso tra 0 e 1. L'accurato esame dei casi in cui il valore di verità di una formula logica è "sfuocato" costituisce l'oggetto della cosiddetta **fuzzy logic**, un'estensione della teoria classica poiché per essa non valgono i principi aristotelici di non-contraddizione e del terzo escluso ("*tertium non datur*"): si veda la Sezione 1.1.8. Si noti inoltre che il valore di verità di una proposizione di questo tipo è ambiguo se non si precisa l'ambiente a cui si applica. Per esempio, la sua valutazione sarebbe diversa nel caso in cui Gianfranco fosse un pigmeo o viceversa un membro della tribù dei Tutsi (impropriamente noti come Watussi) e la sua altezza dovesse essere valutata relativamente al gruppo etnico di riferimento.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	**V**	F
F	F	V	V	F	F	**V**	V

I valori di verità attribuiti alle formule composte seguono criteri aderenti alla loro interpretazione naturale. Per esempio, nel caso del connettivo unario di negazione, la tavola asserisce che se la formula A è vera, allora la sua negazione $\neg A$ è falsa (nonché, viceversa, se A è falsa, allora $\neg A$ è vera).

Altrettanto intuitiva è l'attribuzione semantica relativa al connettivo binario di unione logica: la formula composta $A \vee B$ è vera se almeno una tra A e B è vera, ed è falsa solo nel caso in cui sia A che B siano false. Si noti che la semantica dell'unione logica riproduce quella di un "*vel*" latino (ossia un "oppure inclusivo") e non di un "*aut*" (ossia un "oppure esclusivo").

Anche l'attribuzione semantica relativa al connettivo binario di intersezione logica è naturale. Infatti, la tavola di verità asserisce che se A è vera e B è vera, allora la formula $A \wedge B$ è anch'essa vera; viceversa, se almeno una tra A e B è falsa, allora $A \wedge B$ è anch'essa falsa.

Una particolare attenzione è richiesta per la comprensione e la giustificazione dei valori di verità presenti nelle ultime due colonne, ossia l'attribuzione semantica relativa ai connettivi binari di implicazione ed equivalenza. Considerata la sottile complessità di tali concetti nonché la loro imprescindibile importanza per una comprensione dei fondamenti della matematica, dedichiamo le prossime due sezioni ad una loro accurata disamina.

1.1.4 Condizione necessaria, condizione sufficiente

La maggior parte dei risultati di questi quattro volumi (nonché molte proposizioni della lingua italiana) sono espressi nella forma di **implicazioni** del tipo "$A \Rightarrow B$", ove A e B sono asserzioni-formule matematiche.[6] L'implicazione "$A \Rightarrow B$" si può leggere in vari modi equivalenti:

- "*se* A, *allora* B", oppure
- "A *implica* B", oppure
- "A è *condizione sufficiente* per B", oppure
- "B è *implicato da* A", oppure

[6] Come si preciserà successivamente, le implicazioni matematiche sono precedute da una quantificazione universale relativa all'oggetto della formula, sia esso un numero, un insieme, una matrice, una retta, una funzione, etc.

- "B è *condizione necessaria* per A".[7]

L'attribuzione semantica relativa ad una formula sifatta codifica una "sequenzialità materiale" (e non necessariamente "concettuale") tra l'asserzione A, detta **antecedente**, e l'asserzione B, detta **conseguente**. Al fine di chiarire il significato di tale nozione di **implicazione materiale**, consideriamo le due seguenti implicazioni espresse nel linguaggio italiano:

(a) *se* il Presidente del Consiglio dei Ministri della Repubblica Italiana è Silvio Berlusconi e la Costituzione della Repubblica Italiana prevede che il Presidente del Consiglio dei Ministri promuova e coordini l'attività del Governo della Repubblica Italiana, *allora* Silvio Berlusconi promuove e coordina l'attività del Governo della Repubblica Italiana;

(b) *se* il Presidente del Consiglio dei Ministri della Repubblica Italiana è Silvio Berlusconi e la Costituzione della Repubblica Italiana prevede che il Presidente del Consiglio dei Ministri promuova e coordini l'attività del Governo della Repubblica Italiana, *allora* la Terra gira attorno al Sole.

Per quanto scritto nella tavola di verità della Sezione 1.1.3, entrambe le implicazioni (a) e (b) sono vere, essendo veri sia l'antecedente[8] che il conseguente. Tuttavia, mentre non esiste alcun motivo per dubitare della verità dell'implicazione (a), in quanto relativa a due asserzioni vere nonché concettualmente collegate tra loro, viceversa si potrebbe nutrire qualche legittimo dubbio circa la verità dell'implicazione (b), poiché essa mette in relazione due fatti che non hanno alcun apparente legame concettuale, ancorché entrambi veri.

Il considerare vere entrambe le proposizioni (a) e (b) discende dalla necessità logica di rendere assoluta l'attribuzione semantica relativa ad un'implicazione, basandola esclusivamente sui valori di verità di antecedente e conseguente. Infatti, se il valore di verità di un'implicazione dovesse in qualche modo dipendere da possibili o presunte relazioni concettuali tra antecedente e conseguente, si causerebbe non poca confusione, essendo le relazioni concettuali puramente soggettive e non oggettive.[9] I dubbi sulla verità dell'implicazione (b) sorgono perché si tende a confondere il concetto di "verità" con quello di "utilità". Se ci si limita a guardare alla verità materiale di una proposizione anziché alla sua possibile utilità, allora anche la (b) è vera (anche se completamente inutile), perché tali sono antecedente e conseguente.

[7] I giuristi direbbero "B è *conditio sine qua non* affinché A".

[8] Al momento in cui si scrive Silvio Berlusconi è il Presidente del Consiglio, e la Costituzione vigente prevede che tra le prerogative del Presidente del Consiglio ci siano quelle di promozione e coordinamento dell'attività del Governo.

[9] Si pensi al caso in cui taluno decida inopinatamente di attribuire una valenza concettuale all'implicazione (b).

I due esempi presentati illustrano le ragioni per cui nella tavola di verità della Sezione 1.1.3 la formula "$A \Rightarrow B$" risulta vera in tutti i casi in cui sia l'antecedente A che il conseguente B siano veri (ossia la prima riga). Per quanto riguarda gli altri tre valori di verità relativi all'implicazione, due di essi (evidenziati in grassetto) abbisognano di un'attenta giustificazione, in quanto parzialmente controintuitivi. Esaminiamo le seguenti locuzioni espresse in lingua corrente, al fine di derivarne alcune linee guida circa la semantica naturale dell'implicazione logica nei casi suddetti:

(c) *se* il Presidente della Repubblica Italiana è Giorgio Napolitano e la residenza ufficiale del Presidente della Repubblica è il Palazzo del Quirinale, *allora* il Colosseo è la residenza ufficiale di Giorgio Napolitano;

(d) *se* esiste un cane volante, *allora* la popolazione della Cina è superiore a quella dell'Italia;

(e) *se* la Fiat 500 ha una velocità massima superiore a quella della Ferrari 599 GTO, *allora* "la IX Sinfonia di Ludwig van Beethoven" è il titolo di un quadro del Caravaggio.[10]

Per quanto scritto nella tavola di verità dei connettivi, la (c) è falsa (essendo vero l'antecedente e falso il conseguente), la (d) è vera (essendo falso l'antecedente e vero il conseguente) e la (e) è vera (essendo falsi sia l'antecedente che il conseguente).[11]

Riteniamo che difficilmente si potrebbero nutrire dubbi sulla falsità dell'asserzione (c), nonché, più in generale, sulla falsità delle implicazioni in cui l'antecedente è vero e il conseguente è falso. Pertanto, in tali casi il valore attribuito dalla tavola di verità presentata nella Sezione 1.1.3 coincide con quello che l'intuizione supporta.

Viceversa, risulta apparentemente innaturale il considerare vere le implicazioni (d) ed (e), nonché, più in generale, le implicazioni nei casi evidenziati in grassetto nella suddetta tavola di verità. Specificamente, si legge nella tavola che l'implicazione "$A \Rightarrow B$" risulta vera anche nei casi in cui l'antecedente A sia falso, a prescindere dal valore di verità del conseguente B. Tale scelta

[10] Il conseguente di tale implicazione è falso a prescindere da una conoscenza capillare delle opere del Caravaggio, visto che Beethoven compose la sua IX Sinfonia qualche secolo dopo la morte del Caravaggio.

[11] Al fine di renderle significative, al momento le implicazioni (c), (d), (e) sono atemporali, ossia considerate in un tempo fissato: il presente di chi scrive. Per esempio, nella (c) l'antecedente è vero e il conseguente è falso, in quanto al momento in cui si scrive Giorgio Napolitano è il Presidente della Repubblica Italiana e il Palazzo del Quirinale è la residenza ufficiale del Presidente della Repubblica.

aprioristica relativa alla semantica dell'implicazione discende da ragioni filosofiche e tecniche, efficacemente sintetizzate dalla locuzione "*ex falso quodlibet sequitur*", ossia "dal falso segue qualsiasi cosa".

A parziale supporto delle ragioni apparentemente oscure che inducono ad attribuire tali valori di verità, esaminiamo nuovamente la proposizione (a). Essa asserisce che, sotto le due condizioni che (1) Silvio Berlusconi sia il Presidente del Consiglio dei Ministri e (2) la Costituzione attribuisca determinati poteri al Presidente del Consiglio, Silvio Berlusconi esercita un'azione di promozione e coordinamento dell'attività del Governo della Repubblica. L'intuizione supporta l'attribuzione del valore di verità "V" a tale implicazione nel momento in cui si scrive. E se leggessimo la proposizione (a) nel 2050, la dovremmo considerare ancora vera? Oppure il non verificarsi di una delle condizioni (1) e (2) dovrebbe indurci a ritenerla falsa?

Invero, una lettura alternativa della (a) consente di applicare in modo naturale il principio "*ex falso quodlibet sequitur*" per concludere che la (a) è, forse inaspettatamente, sempre vera, a prescindere dal tempo in cui si legge. La proposizione (a) si può scrivere come segue:

(a′) *nel caso in cui si verifichino le circostanze che* il Presidente del Consiglio dei Ministri della Repubblica Italiana è Silvio Berlusconi e la Costituzione della Repubblica Italiana prevede che il Presidente del Consiglio dei Ministri promuova e coordini l'attività del Governo della Repubblica Italiana, *allora* Silvio Berlusconi promuove e coordina l'attività del Governo della Repubblica Italiana.

Nel mese di gennaio del 2011 la (a′) è vera, in quanto sono veri sia l'antecedente che il conseguente. Tuttavia, la (a′) è vera anche nel 2050, in quanto una delle circostanze oggetto dell'antecedente non accade,[12] per cui, essendo l'antecedente falso, non c'è nulla da verificare! In altri termini, nel 2050 la (a′) è vera in quanto i casi in cui occorrerebbe effettuare una verifica rimangono solo potenziali e non si concretizzano mai: si dice in tal caso che l'implicazione è **vacuamente vera**, ossia è vera senza bisogno di verificare nulla. In conclusione, visto che la (a) e la (a′) sono ovviamente modi diversi di esprimere la stessa cosa, ne segue che l'implicazione (a) è sempre vera, sia nei casi in cui l'antecedente sia vero (ad esempio, nel 2010) che in quelli in cui sia falso (ad esempio, nel 2050).

Ad ulteriore supporto delle ragioni che inducono a stabilire i menzionati valori di verità per il connettivo d'implicazione, consideriamo le seguenti due formule matematiche poste nella forma di implicazione:[13]

[12] Si presume che non si verifichino eventi innaturali.

[13] L'insieme dei numeri naturali è l'insieme infinito $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots, 100, \ldots\}$: si veda la Sezione 2.1.5 del Capitolo di Insiemistica.

(i) “Per ogni numero naturale n, se n è pari, allora $n + 1$ è dispari”

(i′) “Se n è un numero naturale pari, allora $n + 1$ è dispari”.

È naturale ritenere che le due asserzioni (i) e (i′) abbiano l’identico significato, dunque ci si attende che abbiano anche lo stesso valore di verità in tutte le circostanze possibili. Non si dovrebbero nutrire dubbi nutrire sulla verità dell’asserzione (i′): invero, nei casi in cui n è pari, il suo successore $n + 1$ è dispari, e dunque l’implicazione è vera (in quanto sono tali sia l’antecedente che il conseguente).

Tuttavia, la formula (i) consente al numero n qualcosa che la (i′) non prevede esplicitamente, ossia che n sia un *arbitrario* numero naturale. Cosa accadrebbe se il numero naturale n fosse dispari? Sorge allora spontanea la perplessità che la formula (i) possa non essere vera per tutti i numeri naturali e lo sia soltanto per quelli pari. Ciò genererebbe non poca confusione, in quanto la (i) e la (i′) finirebbero per avere valori di verità diversi, a dispetto della loro naturale equivalenza semantica.

Proprio al fine evitare questa confusione, si stabilisce *a priori* che l’implicazione risulti sempre vera (più precisamente, “vacuamente vera”) in tutti i casi in cui l’antecedente sia falso. In altri termini, anche se la formula (i) predica di un numero naturale generico, tuttavia essa impone che l’implicazione valga solo per i numeri pari, nulla asserendo per i numeri dispari: pertanto, in tutti i casi in cui il numero n sia dispari non si deve verificare assolutamente niente, e dunque la formula è vera anche in tali circostanze.

Questa lunga dissertazione relativa al principio di implicazione materiale si rende necessaria per comprendere appieno la portata dei risultati presentati in questi quattro volumi, essendo la loro maggioranza costituita da formule del tipo “$A \Rightarrow B$”, precedute da una quantificazione universale (sia essa esplicita o, più spesso, sottintesa). Chiariremo meglio come tale principio si applichi in concreto nella Sezione 1.1.6, ivi presentando alcuni esempi di proposizioni matematiche poste nella forma di implicazione.

1.1.5 Condizione necessaria e sufficiente

Date due formule A e B, la formula “$A \Leftrightarrow B$” si può leggere in vari modi:

- “A è *logicamente equivalente* a B”, oppure
- “A *se e solo se* B”, oppure
- “A è *condizione necessaria e sufficiente* affinché B”, oppure
- “B è *condizione necessaria e sufficiente* affinché A”, oppure

- "A è una *caratterizzazione* di B", oppure
- "B è una *caratterizzazione* di A".

La formula composta "$A \Leftrightarrow B$" esprime una sorta di interscambiabilità logica tra le due formule elementari A e B. Pertanto, come si legge nell'ultima colonna della tavola di verità presentata nella Sezione 1.1.3, essa risulta vera soltanto nei casi in cui le due formule A e B abbiano lo stesso valore di verità, risultando entrambe vere oppure entrambe false.[14]

Similmente a quanto osservato per l'attribuzione semantica relativa al connettivo di implicazione materiale, al fine di determinare il valore di verità di un'equivalenza del tipo "$A \Leftrightarrow B$" occorre e basta esaminare il valore di verità delle asserzioni A e B, prescindendo completamente dal fatto che i concetti ad esse corrispondenti siano in qualsivoglia modo collegati. Ad esempio, le seguenti equivalenze logiche sono vere:

(a) la matematica è utile alla scienza *se e solo se* Napoleone Bonaparte perse la battaglia di Waterloo nel 1815;

(b) Vincent van Gogh è un pittore Cinese del X secolo *se e solo se* l'Italia è una repubblica presidenziale basata sul potere mediatico;[15]

(c) il Sole è nero *se e solo se* la Terra è quadrata.

Infatti, in tali circostanze le asserzioni collegate tra loro dal "se e solo se" sono o entrambe vere – nel caso (a) – o entrambe false – nei casi (b) e (c). Viceversa, le seguenti equivalenze logiche sono ovviamente false:

(d) la matematica è utile alla scienza *se e solo se* Napoleone Bonaparte vinse la battaglia di Waterloo nel 1815;

(e) il patrimonio artistico italiano è uno dei motivi per cui alcuni turisti visitano l'Italia *se e solo se* l'unità d'Italia è stata realizzata nel 1994;

(f) l'Italia ha una superficie maggiore del Brasile *se e solo se* l'Etna è il vulcano più alto d'Europa.

È evidente che le equivalenze matematiche "$A \Leftrightarrow B$" che rivestono un qualche interesse scientifico sono soltanto quelle in cui le asserzioni A e B – oltre ad essere entrambe vere – sono tra loro legate da una qualche relazione concettuale. Da questo punto di vista, le equivalenze simili alla (a) – in cui le

[14] Utilizzando la nozione di *equiveridicità* di cui nella Sezione 1.1.7, la formula "$A \Leftrightarrow B$" è vera se e solo se le due formule A e B sono equiveridiche.

[15] Alcuni lettori potrebbero dubitare della verità di tale equivalenza.

due asserzioni collegate dal "se e solo se" sono vere ma concettualmente non correlate – costituiscono soltanto delle (comunque necessarie) curiosità logiche, non contribuendo in alcun modo alla conoscenza o allo sviluppo della civiltà. Naturalmente le equivalenze logiche presentate in questi volumi sono caratterizzate non solo dalla loro *verità*, ma anche (si spera) dalla loro *utilità*.

1.1.6 Esempi di proposizioni matematiche

In matematica si enunciano delle formule-asserzioni che risultano sempre vere.[16] La maggioranza di tali asserzioni è esprimibile nella forma di un'implicazione oppure di una equivalenza, precedute da una quantificazione universale, implicita od esplicita. Consideriamo i due seguenti tipi di formule:

(I) $\forall x \in X\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big)$

(E) $\forall x \in X\big(A(x) \Leftrightarrow B(x)\big)$

ove x è una variabile che può assumere valori in un certo universo X, mentre $A(x)$ e $B(x)$ sono proposizioni logiche che hanno x tra le loro variabili.[17] Molte delle asserzioni matematiche enunciate in questi volumi sono di tipo (I) o di tipo (E), anche se spesso il quantificatore universale non compare in modo esplicito.[18] L'universo X ove la variabile x si "muove" è, di volta in volta, l'insieme dei numeri reali, o la classe di tutti gli insiemi, o la famiglia di tutte le matrici di un certo ordine, o la famiglia di tutti i sistemi lineari, o l'insieme di tutte le funzioni reali di una variabile reale, etc.

Nonostante possa sembrare prematuro, presentiamo in questa sede alcuni concreti esempi di asserzioni matematiche del tipo (I) ed (E), al fine di chiarirne il significato logico, a volte oscurato dal modo in cui tali asserzioni sono enunciate nei testi di Matematica Generale. Il lettore è invitato a rileggere attentamente queste riflessioni alla luce delle specifiche conoscenze matematiche che acquisirà in seguito e che permetteranno di rendere significativi gli esempi descritti.

Esempio 1: implicazioni. Si considerino le seguenti proposizioni inerenti alcuni degli argomenti trattati nei quattro volumi:

[16] Invero, alcune formule sono talora poste nella forma di *congetture*, ossia asserzioni matematiche di cui non si conosce la verità o la falsità: si veda in merito la Sezione 1.1.11.

[17] Per semplicità di linguaggio, nonostante la presenza del quantificatore universale, continuiamo a chiamare le due formule (I) e (E), rispettivamente, implicazioni ed equivalenze.

[18] Invero, la loro formulazione simbolica è in generale più complessa, tuttavia la semplificazione qui adottata, ancorché imprecisa, ha il vantaggio di chiarire il concetto.

(i) se A è un insieme finito contenente n elementi, allora il suo insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ contiene 2^n elementi;

(ii) un insieme numerico infinito e limitato ha almeno un punto di accumulazione;

(iii) una matrice quadrata avente determinante positivo è invertibile;

(iv) un sistema lineare avente più incognite che equazioni non è mai determinato;

(v) se A è un insieme contenente $n \geq 3$ elementi, allora l'insieme delle funzioni biunivoche da A in A è, rispetto all'operazione di composizione tra applicazioni, un gruppo non abeliano avente $n!$ elementi;

(vi) una funzione[19] derivabile in un punto è ivi continua;

(vii) una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è ivi dotata di un massimo assoluto e un minimo assoluto;

(viii) una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è ivi integrabile secondo Riemann;

(ix) se f è una funzione derivabile in un punto con derivata prima positiva, allora f è crescente in tale punto;

(x) l'integrale definito di una funzione definita in un intervallo chiuso e limitato ed ivi integrabile è uguale all'area di un opportuno rettangolo avente come base il segmento rappresentato dal dominio della funzione.

Tutte le asserzioni (i)-(x) sono vere.[20] Inoltre, a dispetto del modo in cui sono presentate, ciascuna di esse è esprimibile come un'implicazione preceduta da una quantificazione universale. Di seguito riscriviamo in tale forma le asserzioni (i), (ii), (vi) e (vii), lasciando al lettore il compito di fare altrettanto con le altre sei asserzioni:

(i′) *per ogni* insieme finito A, *se* A ha cardinalità n, *allora* $\mathcal{P}(A)$ ha cardinalità 2^n;

(ii′) *per ogni* insieme $X \subseteq \mathbb{R}$, *se* X è infinito e limitato, *allora* il suo derivato DX non è vuoto;

[19] Le " funzioni" di cui nelle asserzioni (vi)-(x) sono *funzioni reali di una variabile reale.*

[20] Il lettore esperto avrà riconosciuto, tra gli altri, il *Teorema di Bolzano-Weierstrass*, uno dei *Teoremi di Weierstrass* e il *Teorema della media.*

(vi′) *per ogni* funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$, *se* f è derivabile in un punto $x_0 \in X$, *allora* f è continua in x_0;

(vii′) *per ogni* funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *se* f è continua in $[a,b]$, *allora* f è dotata di massimo assoluto e di minimo assoluto.

In termini di condizione sufficiente o necessaria, le proposizioni (iii), (iv), (viii) e (ix) possono scriversi in modo equivalente come segue:[21]

(iii″) *condizione sufficiente* affinché una matrice quadrata sia invertibile è che il suo determinante sia positivo (oppure: *condizione necessaria* affinché il determinante di una matrice quadrata sia positivo è che tale matrice sia invertibile);

(iv″) *condizione sufficiente* affinché un sistema lineare non sia determinato è che abbia più variabili che equazioni (oppure: *condizione necessaria* affinché un sistema lineare abbia più variabili che equazioni è che non sia determinato);

(viii″) *condizione sufficiente* affinché una funzione definita in un intervallo chiuso a limitato sia ivi integrabile è che essa sia ivi continua (oppure: *condizione necessaria* affinché una funzione definita in un intervallo chiuso a limitato sia ivi continua è che essa sia ivi integrabile);

(ix″) *condizione sufficiente* affinché una funzione derivabile in un punto del dominio sia ivi crescente è che la sua derivata prima sia ivi positiva (oppure: *condizione necessaria* affinché una funzione derivabile in un punto del dominio abbia derivata prima positiva in tale punto è che essa sia ivi crescente).

L'utilità delle proposizioni (i)-(x) sarà chiarita nei relativi capitoli.

Esempio 2: equivalenze. Si considerino le seguenti asserzioni matematiche:

(xi) due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità *se e solo se* esistono un'applicazione iniettiva da A in B ed un'applicazione iniettiva da B in A (oppure: *condizione necessaria e sufficiente* affinché due insiemi A e B abbiano la stessa cardinalità è che esistano un'applicazione iniettiva da A in B ed un'applicazione iniettiva da B in A);

(xii) una matrice quadrata è invertibile *se e solo se* il suo determinante è non nullo (oppure: *condizione necessaria e sufficiente* affinché una matrice quadrata sia invertibile è che abbia determinante diverso da zero);

[21] Nuovamente lasciamo al lettore il compito di fare altrettanto con le altre sei asserzioni.

(xiii) un sistema lineare è possibile *se e solo se* il rango della sua matrice incompleta è uguale al rango della sua matrice completa (oppure: *condizione necessaria e sufficiente* affinché un sistema lineare sia possibile è che il rango della sua matrice incompleta sia eguale al rango della sua matrice completa);

(xiv) una funzione è crescente in un intervallo *se e solo se* essa è crescente in ogni punto dell'intervallo (oppure: *condizione necessaria e sufficiente* affinché una funzione sia crescente in un intervallo è che sia crescente in ogni punto dell'intervallo);

(xv) una funzione reale di n variabili reali definita su un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$ è convessa *se e solo se* il suo epigrafico è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^{n+1}$ (oppure: *condizione necessaria e sufficiente* affinché una funzione reale di n variabili reali definita su un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$ sia convessa è che il suo epigrafico sia un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^{n+1}$).

Le condizioni necessarie e sufficienti (xi)-(xv), oltre ad essere *vere*, sono anche *utili*, in quanto permettono di analizzare alcune circostanze matematiche da vari punti di vista equivalenti.

Ad esempio, l'asserzione (xii) mette in relazione la nozione di invertibilità di una matrice quadrata con quella di determinante. È di tutta evidenza l'utilità di poter evincere l'invertibilità di una matrice quadrata dal computo di un numero – il determinante della matrice stessa – evitando così il lungo e complicato calcolo effettivo della sua matrice inversa.

Altrettanto utile è la condizione (xiii),[22] che mette in relazione la nozione di risolvibità di un sistema di equazioni lineari da una parte e la nozione di rango di una matrice dall'altra. Essa consente di affidare la risoluzione di un sistema lineare al confronto dei ranghi di due matrici, cosa molto conveniente da un punto di vista computazionale.

1.1.7 Equiveridicità

Due formule A e B si dicono **equiveridiche** se hanno sempre lo stesso valore di verità; in tal caso, si usa la notazione "$A \operatorname{eq} B$". In altri termini, se si costruiscono le tavole di verità delle formule A e B, allora esse esibiscono gli identici valori di verità nella colonna corrispondente. Alcuni esempi di equiveridicità sono i seguenti (verificare!):

[22] Il lettore esperto avrà riconosciuto il *Teorema di Rouchè-Capelli*.

Proposizione 1.1. Se A e B sono formule arbitrarie, allora si ha:

(i) $A \quad \text{eq} \quad \neg(\neg A)$

(ii) $\neg(A \wedge B) \quad \text{eq} \quad (\neg A \vee \neg B)$

(iii) $\neg(A \vee B) \quad \text{eq} \quad (\neg A \wedge \neg B)$

(iv) $(A \Rightarrow B) \quad \text{eq} \quad (\neg A \vee B)$

(v) $(A \Rightarrow B) \quad \text{eq} \quad (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Ad esempio, la seguente tavola di verità esibisce (più precisamente, "dimostra") la equiveridicità delle due formule di cui in (ii):

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B}$	$A \wedge B$	$\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$
V	V	F	F	**F**	V	**F**
V	F	F	V	**V**	F	**V**
F	V	V	F	**V**	F	**V**
F	F	V	V	**V**	F	**V**

Osserviamo che dalla (v) si evince che per "dimostrare" che l'asserzione A implica l'asserzione B occorre e basta dimostrare che la negazione di B implica la negazione di A: questa è la cosiddetta **dimostrazione per negazione**, che è a sua volta un caso particolare della **dimostrazione per assurdo**.[23] In questi volumi avremo modo di esaminare tante dimostrazioni per assurdo: si vedano, ad esempio, la dimostrazione dell'irrazionalità del numero $\sqrt{2}$ (Teorema 2.3 della Sezione 2.1.6 del Capitolo di Insiemistica), nonché molte delle dimostrazioni relative alle proprietà della matrice inversa (Capitolo delle Matrici del Volume II).

Alcuni esempi di equiveridicità tra formule che usano quantificatori sono i seguenti:

Proposizione 1.2. Se x è una variabile che può assumere valori in un certo universo X, e $P(x)$ e $Q(x)$ sono formule che hanno x tra le loro variabili, allora si ha:

(vi) $\neg\big(\forall x \in X\ P(x)\big) \quad \text{eq} \quad \exists x \in X\ \neg P(x)$

(vii) $\neg\big(\exists x \in X\ P(x)\big) \quad \text{eq} \quad \forall x \in X\ \neg P(x)$

(viii) $(\forall x \in X\ P(x)) \wedge (\forall x \in X\ Q(x)) \quad \text{eq} \quad \forall x \in X\ \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$

(ix) $(\exists x \in X\ P(x)) \vee (\exists x \in X\ Q(x)) \quad \text{eq} \quad \exists x \in X\ \big(P(x) \vee Q(x)\big)$.

[23] Si veda la Sezione 1.1.9 per una nozione informale di dimostrazione.

Ad esempio, si consideri la proposizione (b) della Sezione 1.1.2, ossia “tutti gli uomini sono mortali”. La sua negazione, che è “non tutti gli uomini sono mortali” (e non, si badi bene, “tutti gli uomini sono immortali”) è linguisticamente equiveridica alla proposizione “esiste un uomo immortale”. La (vi) permette di riprodurre a livello simbolico tale equiveridicità. Infatti, la proposizione “tutti gli uomini sono mortali” è codificata in modo simbolico dalla formula “ $\forall u \in U \; M(u)$”. La sua negazione è codificata dalla formula “ $\neg(\forall u \in U \; M(u))$”. Quest’ultima è, in forza della (vi) di cui sopra, equiveridica alla formula “ $\exists u \in U \; \neg M(u)$”, che in lingua corrente si legge “esiste un uomo immortale”.

Si presti anche attenzione alle (viii) e (ix), che consentono di “mettere in evidenza” i quantificatori sotto opportune condizioni. Il lettore rifletta attentamente sulla circostanza che non sono state aggiunte alla Proposizione 1.2 le seguenti relazioni di equiveridicità:

(x) $\big(\forall x \in X \; P(x)\big) \;\vee\; \big(\forall x \in X \; Q(x)\big) \quad \text{eq} \quad \forall x \in X \; \big(P(x) \vee Q(x)\big)$

(xi) $\big(\exists x \in X \; P(x)\big) \;\wedge\; \big(\exists x \in X \; Q(x)\big) \quad \text{eq} \quad \exists x \in X \; \big(P(x) \wedge Q(x)\big)\,.$

Come mai?

1.1.8 Tautologie e contraddizioni

Una **tautologia** è una formula che risulta sempre vera qualunque siano i valori di verità delle proposizioni logiche che la compongono.[24] Pertanto, nella corrispondente colonna della tavola di verità di una tautologia compare sempre il valore di verità “V”. Un classico esempio di tautologia è dato dalla formula “$A \vee \neg A$”: è sempre vero che una certa proposizione A o è vera o è falsa (principio del “*tertium non datur*”).[25] Un altro esempio di tautologia è dato dalla formula “$(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$ ”, che è tale in quanto l’antecedente dell’implicazione è sempre falso. Più in dettaglio, si ha:

A	B	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	$(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$
V	V	F	F	**V**
V	F	F	F	**V**
F	V	V	F	**V**
F	F	V	F	**V**

[24] Per semplicità di trattazione, le tautologie da noi considerate saranno, con qualche sporadica eccezione, relative a formule *senza* quantificatori.

[25] Si veda tuttavia quanto detto a proposito della “*fuzzy logic*” nella Nota 5.

Ne segue che una formula *non* è una tautologia se e solo se nella corrispondente colonna della tavola di verità compare *almeno* un valore "F".

La nozione di contraddizione è *duale* a quella di tautologia. Specificamente, una **contraddizione** è una formula che risulta sempre falsa qualunque siano i valori di verità delle proposizioni logiche che la compongono. Pertanto, nella corrispondente colonna della tavola di verità di una contraddizione compare sempre il valore di verità "F". Un classico esempio di contraddizione è dato dalla formula "$A \wedge \neg A$": non può mai capitare che si verifichino contemporaneamente A e la sua negazione (principio di "non-contraddizione").[26] Un altro esempio di contraddizione è dato dalla formula "$(A \vee \neg A) \Rightarrow (B \wedge \neg B)$"; infatti, si ha:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee \neg A$	$B \wedge \neg B$	$(A \vee \neg A) \Rightarrow (B \wedge \neg B)$
V	V	F	F	V	F	**F**
V	F	F	V	V	F	**F**
F	V	V	F	V	F	**F**
F	F	V	V	V	F	**F**

Ne segue che una formula *non* è una contraddizione se e solo se nella corrispondente colonna della tavola di verità compare *almeno* un valore "V".

Si noti che le due asserzioni "la formula A *non* è una tautologia" e "la formula A è una contraddizione" non sono logicamente equivalenti. Infatti, A non è una tautologia se *esiste almeno un* valore "F" nella corrispondente colonna della tavola di verità, mentre A è una contraddizione se *ogni* valore di verità è "F". Dunque una formula potrebbe non essere una tautologia senza essere una contraddizione. Per ragioni simili, le due asserzioni "la formula A è una tautologia" e "la formula A *non* è una contraddizione" non sono logicamente equivalenti.

Il concetto di tautologia è strettamente connesso a quello di equiveridicità, avendosi:

Proposizione 1.3. Siano A e B formule arbitrarie. Allora A e B sono equiveridiche se e solo se la formula "$A \Leftrightarrow B$" è una tautologia.

Come conseguenza di tale risultato, la Proposizione 1.1 della Sezione 1.1.7 si può riformulare come segue in termini di "tautologie notevoli" (proposizionali):[27]

[26] Si veda tuttavia quanto detto a proposito della "*fuzzy logic*" nella Nota 5.

[27] Il significato del termine "*Corollario*" sarà chiarito nella Sezione 1.1.9.