1 Capitalizzazione e attualizzazione

1.1. *Operazioni finanziarie*

La Matematica Finanziaria studia i criteri per la valutazione razionale di importi monetari la cui disponibilità non coincide con l'istante di valutazione. È evidente, infatti, che il "valore" di una somma di denaro si incrementa al passare del tempo, sia in un'operazione di investimento (in cui si rinuncia alla disponibilità immediata di una somma di denaro nella prospettiva di ottenere in futuro un importo superiore), sia in un'operazione di finanziamento (nella quale si riceve al momento una somma inferiore a quella che si dovrà rimborsare a scadenza). Tutti i casi ora descritti comportano – almeno concettualmente – uno "scambio" tra importi disponibili a tempi diversi; di conseguenza, il "valore" della somma di denaro che si vuole valutare coincide con quell'importo che oggi si può scambiare con essa. Lo scambio in parola si definisce più propriamente *operazione finanziaria*.

Operazione finanziaria è qualsiasi contratto (o accordo) che dia origine allo scambio di somme di denaro riferite ad epoche diverse tra due soggetti.

Sono esempi di operazioni finanziarie:

- acquisto di BOT e successiva vendita;
- acquisto di certificati di deposito a scadenza fissa;
- sconto di cambiale;
- accensione di mutui;
- acquisti a pagamento rateale;
- contratti di *leasing*.

Un'operazione finanziaria si dice *semplice* o *complessa* a seconda che vi siano coinvolte due o più scadenze. Ad esempio, è un'operazione semplice lo sconto di una cambiale, nel quale intervengono due tempi rilevanti: quello in cui la banca anticipa al portatore della cambiale la somma scontata, e quello in cui la stessa banca entra in possesso del capitale della cambiale, pagato dal debitore. Un'operazione complessa è invece l'investimento in un BTP: in questo caso le date rilevanti – cioè quelle in cui si registrano movimenti di capitali – sono l'istante di investimento (nel quale si entra in possesso del titolo) e le date di incasso di ciascuna delle cedole, nonché quella del rimborso finale del capitale.

1.2. *Montante, interesse e sconto*

Riportiamo schematicamente sull'asse dei tempi i capitali coinvolti in un'operazione finanziaria semplice, per fissare le idee un investimento. Siano t_0 e t_1 le date iniziale e finale dell'investimento; per semplicità supporremo che t_0 sia la data odierna.

L'importo investito si dice *capitale iniziale*, quello disponibile alla fine dell'investimento *capitale finale* o anche *montante*.

✓ *Esempio*

All'epoca iniziale, 1° gennaio 2017, si impiega un capitale di € 5.000 per il periodo di tempo che termina in t_1 (epoca di disinvestimento), quando si renderà disponibile il montante M.

t_0	t_1
C = € 5.000	M
$t_0 = 0$ = 1/1/2017	t_1 = 30/6/2017
C = Capitale iniziale	M = Capitale finale = Montante

Riesce del tutto ragionevole ritenere che il montante sia superiore al capitale iniziale: ciò sia per corrispondere a fondamentali postulati economici, sia per salvaguardare l'ipotesi di comportamento razionale degli agenti. Infatti, chi rinuncia oggi ad una disponibilità finanziaria, differendola nel tempo, richiede che gli venga corrisposto un adeguato compenso. Analogamente, chi richiede oggi la disponibilità di una somma che gli sarebbe dovuta ad una data futura, deve corrispondere un adeguato compenso. In entrambi i casi, questo compenso è dato dalla differenza tra il montante e il capitale iniziale, e viene detto *interesse* (I) o *sconto* (D). Si ha quindi, per definizione:

$$I = D = M - C.$$

1.3. *Leggi finanziarie di capitalizzazione*

La valutazione del montante di un'operazione finanziaria, della quale siano note le altre quantità caratteristiche (il capitale iniziale e l'epoca finale – ricordiamo che per convenzione l'epoca di inizio è l'istante corrente) avviene usando particolari funzioni, il cui utilizzo è stabilito di comune accordo tra le parti interessate (quindi non esiste alcun caso in cui sia obbligatorio usare una funzione piuttosto che un'altra – semmai si potrà parlare di consuetudini vigenti sul mercato).

Si chiama *legge finanziaria di capitalizzazione* una funzione atta a definire il montante $M(t)$ accumulato al tempo [1] generico t da un capitale iniziale C:

$$M(t) = F(C, t) \qquad [1.1]$$

e che rispetti i seguenti postulati:

1. $F(C, t)$ è definita per ogni $C \geq 0$, e per ogni $t \in [0, T)$.
   È possibile calcolare il montante M per qualsiasi ammontare di capitale iniziale non negativo e per qualsiasi durata di impiego inferiore ad un dato tempo T, che rappresenta quindi l'estremo superiore delle scadenze prese in considerazione.
2. $F(C, 0) = C$ per ogni $C \geq 0$.
   Se la durata di impiego è nulla, il montante coincide con il capitale. Un investimento con contemporaneo disinvestimento non produce alcun frutto.
3. $t_1 < t_2 \rightarrow F(C, t_1) \leq F(C, t_2)$.
   A parità di capitale investito, il montante ad un'epoca successiva risulta non inferiore al montante a un'epoca precedente. Il capitale impiegato non perde valore nel tempo [2].

Molto spesso viene considerato anche il seguente ulteriore postulato, che stabilisce l'omogeneità della funzione di montante rispetto all'importo:

4. $F(C, t) = C\,F(1, t)$

---

[1] Per le ipotesi semplificatrici fatte, la variabile t denoterà sia l'istante di valutazione del montante, sia la stessa durata dell'operazione. Tale ambiguità verrà risolta nel momento in cui saranno introdotte le funzioni finanziarie a due variabili temporali.

[2] In particolari situazioni contingenti dei mercati finanziari (ad esempio in presenza di tassi negativi) questo postulato può non essere soddisfatto. Tuttavia, nella successiva trattazione, si supporrà che questo postulato si applichi a $F(C, t)$ e a tutte le quantità ad esso collegate.

A parità di durata d'impiego, il montante è direttamente proporzionale al capitale impiegato.

Si dimostrano immediatamente le seguenti proprietà:

- $F(0, t) = 0$ per ogni $t \geq 0$, ossia il montante di un capitale nullo è nullo a qualsiasi epoca futura;
- $C_1 < C_2 \rightarrow F(C_1, t) < F(C_2, t)$, ossia a parità di durata di impiego, a capitale iniziale maggiore corrisponde montante maggiore.

Osserviamo che il postulato 4 (che nella realtà non sempre risulta verificato) consente una notevole semplificazione, in quanto permette di isolare – come coefficiente di proporzionalità – l'importo del capitale iniziale nel calcolo dei montanti, e quindi evidenziare la dipendenza del montante dal solo tempo.

Infatti, ponendo $C = 1$, si definisce la funzione (della singola variabile t)

$$f(t) = F(1, t),$$

che si dice *fattore di montante* ed esprime appunto il montante al tempo t di un capitale iniziale C unitario.

Da quanto esposto si deduce che il fattore di montante è una funzione $f(t)$:

- definita per $t \in [0, T)$;
- tale che $f(0) = 1$;
- non decrescente (se derivabile, $f'(t) \geq 0$).

Dunque il montante al generico tempo t sarà dato da

$$M(t) = Cf(t). \qquad [1.2]$$

Analogamente sono determinati l'interesse e lo sconto maturati al tempo t:

$$I(t) = D(t) = M(t) - C = C[f(t) - 1].$$

1.4. *Tasso d'interesse e tasso di sconto*

L'interesse e lo sconto possono essere messi in rapporto rispettivamente con il capitale iniziale e con il montante, ottenendo rispettivamente il *tasso di interesse di periodo*

$$i(t) = \frac{I(t)}{C} = \frac{M(t)}{C} - 1 = f(t) - 1$$

e il *tasso di sconto di periodo*:

$$d(t) = \frac{D(t)}{M(t)} = 1 - \frac{C}{M(t)} = 1 - \frac{1}{f(t)}.$$

In particolare, se la durata è unitaria ($t = 1$) il numero [3]

$$i = i(1) = f(1) - 1$$

è detto *tasso unitario di interesse*, e il numero

$$d = d(1) = 1 - \frac{1}{f(1)}$$

è detto *tasso unitario di sconto.*

L'ipotesi di non decrescenza del fattore di montante implica la non negatività del tasso di interesse unitario.

1.4.1. *Periodicità del tasso*

Occorre prestare particolare attenzione alla corrispondenza tra l'unità di misura prescelta per la valutazione dei tempi e quella utilizzata per determinare il tasso unitario di interesse (o di sconto). La definizione infatti esige che queste coincidano.

Sia i il tasso annuo e i_k il tasso espresso in ragione di $1/k$ di anno.

A seconda dell'unità di tempo fissata si avrà quindi:

- *Tasso mensile* (i_{12}) $\leftrightarrow$ unità di tempo: 1 mese
- *Tasso trimestrale* (i_4) $\leftrightarrow$ unità di tempo: 1 trimestre
- *Tasso semestrale* (i_2) $\leftrightarrow$ unità di tempo: 1 semestre
- *Tasso annuo* $\leftrightarrow$ unità di tempo: 1 anno
- *Tasso biennale* ($i_{0,5}$) $\leftrightarrow$ unità di tempo: 1 biennio
- ecc.

Il tasso unitario di interesse può quindi essere riferito all'anno o ad una sua frazione o ad un suo multiplo.

Per una maggiore precisione nell'enunciare tassi d'interesse, si utilizza spes-

---

[3] La dimensionalità del tasso unitario di interesse è pari a $[\text{tempo}]^{-1}$, mentre il tasso di interesse di periodo è un numero puro. Lo stesso dicasi per i tassi di sconto. Notiamo anche che la consueta rappresentazione percentuale (es.: $i = 8\%$) deve essere trasformata in notazione decimale ($i = 0{,}08$) al momento di ogni utilizzo nelle formule. Osserviamo inoltre che l'aggettivo "unitario" si riferisce alla durata, visto che il tasso di interesse già per definizione viene rapportato a un capitale unitario.

so il concetto di *punto base* (basis point). Il punto base corrisponde allo 0,01%. Per esempio, se i tassi salgono da 2,75% a 3%, si dice che il tasso è salito di 25 punti base.

1.5. *Regimi finanziari di capitalizzazione*

Una operazione che comporti il differimento di una disponibilità monetaria immediata si dice *capitalizzazione*. Di tale operazione si analizza l'andamento del montante nel corso del tempo, che quindi è la variabile indipendente, essendo noti l'importo del capitale iniziale e il tasso unitario di interesse.

La rappresentazione del montante avviene mediante il fattore di montante precedentemente discusso, specificandone la forma analitica secondo modalità dettate o da facilità di utilizzo, o da convenienza teorica. Ovviamente il fattore di montante preso in esame dovrà soddisfare le sei proprietà analizzate in precedenza.

Più in particolare, i fattori di montante che ora si discuteranno si rappresentano matematicamente mediante tre diverse famiglie di funzioni, caratterizzate da un parametro h il cui significato verrà chiarito tra breve:

– le funzioni affini: $f(t) = 1 + ht, \quad (h > 0);$
– le funzioni esponenziali: $f(t) = e^{ht}, \quad (h > 0);$
– le funzioni iperboliche: $f(t) = \dfrac{1}{1 - ht}, \quad (h > 0).$

Quando si stabilisce di utilizzare una specifica forma funzionale tra queste ora elencate, si dice che si è determinato un *regime finanziario*, e più in particolare

– il *regime finanziario di interesse semplice* (per funzioni affini);
– il *regime finanziario di interesse composto* (per funzioni esponenziali);
– il *regime finanziario di interesse anticipato* (per funzioni iperboliche).

Il parametro h che compare in ciascuna di queste determinazioni è legato al tasso di interesse caratteristico della capitalizzazione, secondo modalità che saranno discusse caso per caso. A un dato valore di h corrisponde una ben determinata funzione di montante, che caratterizza una *legge di capitalizzazione.*

1.6. *Regime di capitalizzazione a interesse semplice*

Il regime di capitalizzazione a interesse semplice si basa sull'ipotesi che l'interesse maturato fino al tempo t sia direttamente proporzionale al capitale iniziale e al tempo trascorso dall'inizio dell'operazione, secondo un fattore di proporzionalità pari al tasso unitario di interesse i. Si stabilisce cioè che

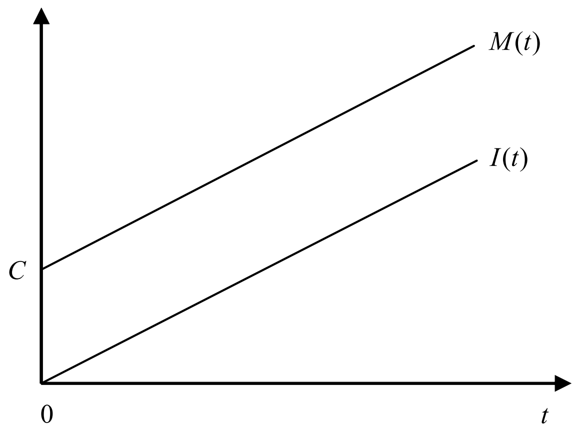
$$I(t) = Cit \qquad [1.3]$$

e pertanto

$$M(t) = C + I(t) = C + Cit = C(1 + it). \qquad [1.4]$$

Secondo questo regime finanziario l'andamento nel tempo del montante e dell'interesse è rappresentato nel grafico seguente:

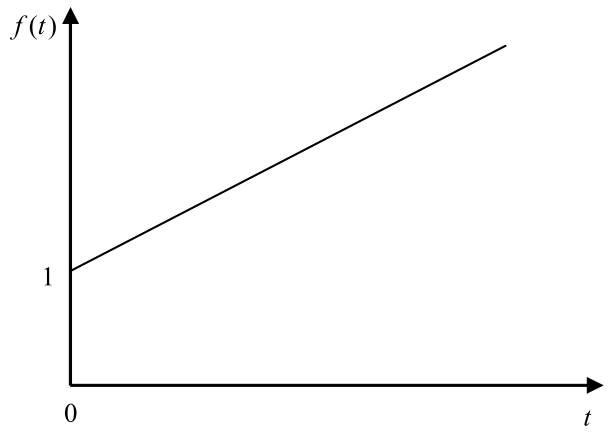
Figura 1.1. – *Grafico di M(t) = C (1 + it) e I(t) = Cit*



Da quanto precede si ottiene che il fattore di montante è dato da

$$f(t) = 1 + it.$$

Figura 1.2. – *Grafico di f(t) = 1 + it*



Il parametro i è il coefficiente angolare della retta e finanziariamente caratterizza la velocità di accrescimento di € 1 impiegato.

✓ ***Esempio***

La capitalizzazione di € 5.000 iniziata in $t_0 = 0 = 1/1/2017$ al tasso $i = 1{,}5\%$ trimestrale produce al tempo $t = 30/6/2017$, in regime di capitalizzazione a interesse semplice, un montante di € 5.150. Infatti, poiché il tasso è trimestrale, occorre misurare il tempo in trimestri: nel caso in esame, la capitalizzazione si protrae per due trimestri. Applicando la formula [1.4], si ottiene

$$M(2) = € \ 5.000\ (1 + 2 \cdot 0{,}015) = € \ 5.150.$$

1.6.1. *Durata intera e durata frazionaria*

Si presenta spesso il problema di calcolare il montante per durate non corrispondenti a un numero intero di periodi: si parla in tal caso di *durata frazionaria.* Il regime di interesse semplice prevede di utilizzare la medesima formula anche in questo caso. Così, il montante della capitalizzazione dell'esempio precedente, valutato dopo 3,5 trimestri dall'inizio, risulta

$$M(3{,}5) = € \ 5.000\ (1 + 3{,}5 \cdot 0{,}015) = € \ 5.262{,}50.$$

Vale sempre l'avvertenza di misurare il tempo nella stessa unità in cui è espresso il tasso unitario di interesse.

Vediamo con semplici esempi come si procede in pratica, prendendo a riferimento un tasso annuo:

– se il capitale C viene impiegato per m mesi interi ($m < 12$), si ha:

$$I = Ci\frac{m}{12}$$

– se il capitale C viene impiegato per g giorni ($g < 30$) si ha:

$$I = Ci\frac{g}{365}$$

365 è il numero di giorni dell'anno civile. In numerose applicazioni pratiche si utilizza invece l'*anno commerciale*, la cui durata è fissata convenzionalmente in 360 giorni, ovvero in 12 mesi composti ciascuno da 30 giorni [4].

Più in generale, considerando una durata t qualsiasi, espressa in (n) anni (m) mesi (g) giorni, si ha:

$$I(t) = Cit, \qquad M(t) = C(1 + it)$$

essendo $t = n + \frac{m}{12} + \frac{g}{365}$ con $0 \le m < 12$ e $0 \le g < 30$.

1.6.2. *Capitalizzazione a tassi variabili nel tempo*

Nella pratica accade molto spesso che la capitalizzazione venga regolata, anziché da un unico tasso costante nel tempo, da una sequenza di tassi di interesse diversi, ciascuno applicabile a un determinato lasso temporale. Vediamo come si possa adeguare il regime di capitalizzazione a interesse semplice a questa circostanza, nel rispetto della formulazione generale di tale regime.

Sia $i^{(1)}$ il tasso di interesse applicabile nel periodo da $t_0 = 0$ a t_1, $i^{(2)}$ quello da t_1 a t_2 e così via. Nel primo periodo gli interessi prodotti, dovendo essere proporzionali al capitale iniziale e alla durata della prima parte di capitalizzazione, in cui è in vigore il tasso $i^{(1)}$, varranno

$$I_1 = C\, i^{(1)}\,(t_1 - t_0).$$

[4] L'utilizzo dell'anno civile piuttosto che quello commerciale è stabilito (esplicitamente, o implicitamente nei rapporti finanziari più consueti) per ogni contratto di capitalizzazione: non esiste infatti alcuna regola generale che imponga l'adozione dell'una o dell'altra convenzione.

mentre gli interessi prodotti nella seconda parte varranno

$$I_2 = C\, i^{(2)} (t_2 - t_1).$$

Pertanto il montante in t_2, come somma di capitale e interessi maturati sarà dato da

$$M(t_2) = C(1 + i^{(1)} t_1 + i^{(2)} (t_2 - t_1)).$$

La suddetta formula può essere estesa al caso in cui vi siano più tassi di capitalizzazione:

$$M(t_n) = C\left[1 + \sum_{k=1}^{n} i^{(k)} (t_k - t_{k-1})\right].$$

La formula ora esposta concretizza il presupposto finanziario del regime di capitalizzazione a interesse semplice, e cioè che gli interessi si rendono disponibili solo alla fine della capitalizzazione, e quindi non producono altri interessi

✓ ***Esempio***

Un capitale di € 5.000 viene impiegato in capitalizzazione a interessi semplici al tasso trimestrale 1,5% per un trimestre, e successivamente per tre trimestri al tasso trimestrale 2%. Il montante raggiunto alla fine (dopo un anno) risulta

$$M(4) = € \ 5.000\ (1 + 1 \cdot 0{,}015 + 3 \cdot 0{,}02) = € \ 5.375.$$

1.7. *Regime di capitalizzazione a interesse composto*

A differenza del regime di capitalizzazione a interesse semplice, il quale prescrive che l'interesse sia sempre direttamente proporzionale al capitale iniziale e al tempo, il *regime di capitalizzazione a interesse composto* si caratterizza per il fatto che, al termine di ogni periodo, il capitale impiegato incorpora gli interessi maturati, in modo che anche questi ultimi producano interessi nei periodi seguenti. In altre parole, l'interesse che si forma in ogni istante è ora proporzionale al montante accumulato a quel tempo. La produzione di interessi da altri interessi, su un determinato capitale, nel linguaggio giuridico è chiamata *anatocismo.*

✓ ***Esempio***

Consideriamo la capitalizzazione raffigurata schematicamente nel grafico