Capitolo 1

Nozioni preliminari sugli insiemi

1.1 Premessa

Vogliamo dare in questo capitolo pochi elementi per costruire un linguaggio che servirà da supporto per quel che seguirà.
Il concetto di insieme è uno dei concetti fondamentali della matematica e la sua definizione ha portato a riflessioni su principi apparentemente elementari e a differenti teorie assiomatiche, preferiamo però per ragioni di opportunità e tempo prendere una scorciatoia.
Il concetto di insieme quindi non sarà dato attraverso una definizione, ma come concetto primitivo, il suo significato nascerà dall'uso.
Costituiscono insiemi, per esempio, gli alunni di una stessa classe, i numeri pari, i numeri dispari, le rette del piano etc.
I termini raggruppamento, classe, aggregato, famiglia, usati nel linguaggio comune, saranno da noi, tutti sostituiti dal termine insieme.
Il termine insieme può essere riferito anche ad insiemi di oggetti di natura diversa e del tutto arbitraria. Quel che conta è che, dato un insieme ed un oggetto, sia sempre vera una ed una sola delle due alternative:

1. l'oggetto dato appartiene all'insieme;
2. l'oggetto dato non appartiene all'insieme.

Generalmente gli elementi di un insieme si denotano con le lettere minuscole: $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$ e gli insiemi con le lettere maiuscole: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots$
Per indicare che l'oggetto a appartiene all'insieme A, scriveremo:

$$a \in A \text{ e leggeremo '}a\text{ appartiene ad }A\text{'},$$

mentre per indicare che un certo oggetto a non appartiene all'insieme A, scriveremo:

$$a \notin A \text{ e leggeremo '}a\text{ non appartiene ad }A\text{'}.$$

Anche nel seguito la sovrapposizione del simbolo / indicherà negazione.

1.2 Rappresentazione degli insiemi

Un insieme si può rappresentare in tre diversi modi:
Rappresentazione tabulare: consiste nell'elencare tutti gli elementi all'interno di parentesi graffe, senza ripetizioni e prescindendo dall'ordine con cui sono scritti gli elementi.
Se A è l'insieme delle vocali, allora scriveremo:

$$A = \{a, e, i, o, u\}.$$

Questa rappresentazione ha il vantaggio di elencare tutti gli elementi dell'insieme ma è inadeguata se gli elementi sono tanti.
Rappresentazione caratteristica: si utilizza se tutti gli elementi di un insieme godono di una stessa proprietà caratteristica, ossia una proprietà che caratterizza in maniera inequivocabile gli elementi dell'insieme.
Sia A l'insieme caratterizzato dalla proprietà $P(a)$, utilizziamo una barra verticale, $|$, come simbolo per l'espressione "tale che", per un insieme così fatto si scrive:

$$A = \{a \mid P(a) \text{ è vera}\}$$

e si legge "A è l'insieme degli elementi a tali che per essi sia vera la proprietà $P(a)$".
La barra verticale non è l'unico simbolo usato nei testi di matematica per

l'espressione "tale che"; a seconda dei casi (o dei gusti) si utilizzano $\ni'$, t.c. (tale che). Si utilizzerà il simbolo dei due punti per indicare l'espressione "risulta ...".
Pur consapevoli che lo zero non è un numero naturale, che la sua necessità come cifra nasce dalla notazione posizionale e che fu riconosciuto come numero solo con la nascita dei numeri negativi, denoteremo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e scriveremo quindi:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, n + 1, ...\}$$

e con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri relativi e scriveremo quindi:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, ...\}.$$

Denoteremo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali e con $\mathbb{R}_+$ l'insieme dei numeri reali non negativi. Esso si può caratterizzare nel modo seguente:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Rappresentazione grafica con diagrammi di Eulero-Venn: consiste nel rappresentare gli elementi dell'insieme come punti del piano euclideo delimitati da una curva chiusa e non intrecciata. Tale rappresentazione ha il vantaggio, come vedremo, di illustrare in maniera intuitiva determinate proprietà degli insiemi.

Definizione 1.2.1 *Un insieme è detto insieme* ***vuoto*** *se non esistono elementi che soddisfano la proprietà caratteristica dell'insieme, o più semplicemente è un insieme che non ha alcun elemento e si denota con il simbolo $\emptyset$.*

Il simbolo $\Rightarrow$ si chiama simbolo di implicazione ed è usato tra due proposizioni o proprietà P e Q. Scriveremo che

$$P \Rightarrow Q$$

se per P vera si ha Q vera e diremo che P è condizione sufficiente per Q o che Q è condizione necessaria per P. Scriveremo che

$$P \Leftrightarrow Q$$

e si leggerà P equivale Q se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$. Si dirà che P è condizione necessaria e sufficiente per Q.

Esempio 1.2.2 *Se $P(x) =$ "x è un triangolo equilatero", $Q(x) =$ "x è un triangolo isoscele", $R(x) =$ "x è un triangolo equiangolo" possiamo scrivere:*

$$P(x) \Rightarrow Q(x), \quad Q(x) \not\Rightarrow P(x), \quad P(x) \Leftrightarrow R(x).$$

Esempio 1.2.3 *Se $P(x) =$ "$x^2 > 120$" e $Q(x) =$ "$x > 10$" possiamo affermare che:*

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x), \ \forall x \in \mathbb{N},$$
$$P(x) \not\Leftrightarrow Q(x), \ \forall x \in \mathbb{R},$$
$$Q(x) \not\Rightarrow P(x), \ \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

1.3 Relazione di inclusione

Definizione 1.3.1 *Un insieme A si dice* ***contenuto in un insieme*** *B se ogni elemento di A appartiene a B.*

Scriveremo:

$A \subseteq B$ e leggeremo 'A è contenuto in B' o 'A è incluso in B' o 'A è sottoinsieme di B'.

Se facciamo uso dei seguenti simboli: $\forall$ (quantificatore universale), che si legge "per ogni" ed $\exists$ (quantificatore esistenziale), che si legge "esiste", si ha:

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall a \in A : a \in B$$

di conseguenza

$$A \not\subseteq B \, (A \text{ non è contenuto in } B) \Longleftrightarrow \exists a \in A \ni' a \notin B.$$

Definizione 1.3.2 *Dati due insiemi A e B diremo che A è* ***uguale*** *a B se ogni elemento dell'insieme A è elemento dell'insieme B e viceversa, e quindi*

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$ (ossia esiste almeno un elemento $b \in B$ che non appartiene ad A) si può anche scrivere $A \subset B$.
Tra i sottoinsiemi di B vi sono sempre l'insieme vuoto e lo stesso B (vengono anche detti sottoinsiemi impropri di B); gli altri sottoinsiemi di B sono detti sottoinsiemi propri di B (figura 1.1).

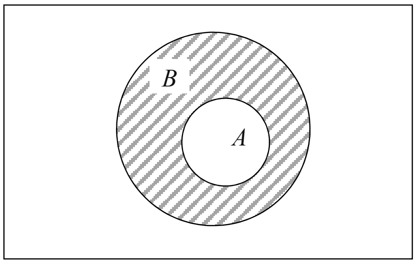

Figura 1.1: Inclusione

Esempio 1.3.3 *Se $\mathbb{N}_p$ denota l'insieme dei numeri pari ed $\mathbb{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali si ha:*

$$\mathbb{N}_p \subset \mathbb{N}.$$

Lo stesso possiamo dire di $\mathbb{N}_d$, insieme dei numeri dispari.
Valgono le seguenti proprietà:

Proprietà 1.3.4 *Siano A, B, C insiemi risulta:*

1. $A \subseteq A$, *proprietà riflessiva dell'inclusione;*
2. $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$, *proprietà transitiva dell'inclusione;*
3. $\emptyset \subseteq A$.

Dimostrazione. La dimostrazione di queste proprietà è una semplice applicazione della definizione di inclusione 1.3.1. ■

1.4 Insieme delle parti

A partire da un generico insieme U è possibile definire un nuovo insieme detto **insieme delle parti** i cui elementi sono tutti i possibili sottoinsiemi di U. Esso viene denotato con:

$$P(U) = \{X \mid X \subseteq U\}$$

si osservi che il generico elemento di $P(U)$ è stato indicato con la maiuscola X per ricordare che esso è a sua volta un insieme.
Poichè $U \subseteq U$ e $\emptyset \subseteq U$ l'insieme $P(U)$ contiene tra i suoi elementi sia lo stesso U che l'insieme $\emptyset$.

Esempio 1.4.1 *Sia* $U = \{1, 2, 3\}$, *allora l'insieme delle parti è:*

$$P(U) = \{\emptyset, U, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Si vede che se U ha 3 elementi, $P(U)$ ha $2^3 = 8$ elementi.
Si può dimostrare, più in generale, che se U è un insieme di n elementi, $P(U)$ ha 2^n elementi.

1.5 Operazioni tra insiemi

Nell'insieme $P(U)$ di tutti i sottoinsiemi di un dato insieme U, si introducono tre operazioni.

1.5.1 Complementare

Definizione 1.5.1 *Sia* $A \in P(U)$, *cioè* $A \subseteq U$, *il* ***complementare*** *di* A *rispetto ad* U *(figura 1.2), è l'insieme degli elementi di* U *che non appartengono ad* A. *Si denota con* $\mathcal{C}_U A$*:*

$$\mathcal{C}_U A = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

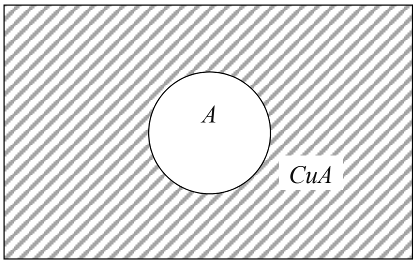

Figura 1.2: Complementare

Esempio 1.5.2 *Sia* $U = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n < 10\}$ *e sia* $A = \{2, 4, 6, 8\}$*, naturalmente* $A \subseteq U$*. Il complementare di* A *rispetto a* U *è:*

$$\mathcal{C}_U A = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Proprietà 1.5.3 *Sia* A *un sottoinsieme di* U*, si ha:*

1. $\mathcal{C}_U(\mathcal{C}_U A) = A$ *proprietà involutoria;*
2. $\mathcal{C}_U U = \emptyset$*;*
3. $\mathcal{C}_U \emptyset = U$*.*

Dimostrazione.

Per la dimostrazione si userà la definizione di complementare 1.5.1 e di uguaglianza tra insiemi 1.3.2.

1. Si deve dimostrare che $\mathcal{C}_U(\mathcal{C}_U A) \subseteq A$ e $A \subseteq \mathcal{C}_U(\mathcal{C}_U A)$. Sia $a \in \mathcal{C}_U(\mathcal{C}_U A)$, questo vuol dire che $a \in U$ e $a \notin \mathcal{C}_U A$; ma $a \notin \mathcal{C}_U A$ implica che $a \in A$, segue quindi che $\mathcal{C}_U(\mathcal{C}_U A) \subseteq A$. Sia ora $a \in A$, ovviamente $a \in U$ e $a \notin \mathcal{C}_U A$ quindi $a \in \mathcal{C}_U(\mathcal{C}_U A)$, segue quindi $A \subseteq \mathcal{C}_U(\mathcal{C}_U A)$.

2. Occorre dimostrare che l'insieme $\mathcal{C}_U U$ è privo di elementi. Supponiamo, per assurdo, che $\exists\, a \in \mathcal{C}_U U$, questo vuol dire che $a \in U$ e $a \notin U$, evidentemente questo è assurdo quindi $\mathcal{C}_U U$ non può avere elementi.

3. Si deve dimostrare che $\mathcal{C}_U\emptyset \subseteq U$ e $U \subseteq \mathcal{C}_U\emptyset$. Sia ora $a \in \mathcal{C}_U\emptyset$ questo vuol dire che $a \in U$ e $a \notin \emptyset$, ma questo è vero per ogni $a \in U$. Sia $a \in U$, quindi $a \in U$ e $a \notin \emptyset$ da cui $a \in C_U\emptyset$.

■

Osservazione 1.5.4 *Nella dimostrazione precedente abbiamo usato una dimostrazione per assurdo. Per dimostrare che la tesi è vera, si è supposto che non lo sia e da questa assunzione si è arrivati ad una contraddizione. Questo è sufficiente ad affermare che la tesi è vera.*

1.5.2 Unione tra insiemi

Definizione 1.5.5 *Siano A e B sottoinsiemi di U. Si definisce* ***unione*** *di A e B e si denota con $A \cup B$ (figura 1.3), il sottoinsieme di U di tutti gli elementi che appartengono ad A o a B. In simboli si ha:*

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ o (non esclusivo) } x \in B\}.$$

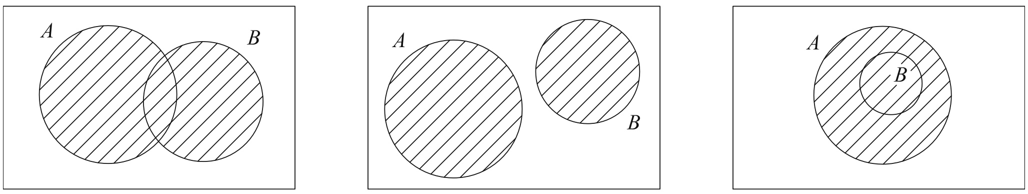

Figura 1.3: Unione

Esempio 1.5.6 *Siano $A = \{0, 2, 3, 7\}$ e $B = \{2, 10\}$ allora si ha:*

$$A \cup B = \{0, 2, 3, 7, 10\}.$$

Proprietà 1.5.7 *Siano A, B e C insiemi.*

1. $A \cup B = B \cup A$ *proprietà commutativa;*

2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *proprietà associativa;*

3. $A \cup A = A$ *proprietà di idempotenza;*

4. $A \cup \emptyset = A$ *proprietà dell'elemento neutro;*

5. $A \cup U = U$ *proprietà dell'elemento assorbente;*

6. $A \cup B = A \iff B \subseteq A$;

7. $A \subseteq A \cup B$;

8. $B \subseteq A \cup B$.

Dimostrazione.
La dimostrazione di tali proprietà prevede ogni volta di applicare, in maniera opportuna, le definizioni precedenti, è quindi un utile esercizio che consigliamo di eseguire. Dimostriamo la proprietà 1 come esempio:
si deve dimostrare che $A \cup B \subseteq B \cup A$ e $B \cup A \subseteq A \cup B$. Infatti se $a \in A \cup B$, questo implica che $a \in A$ oppure $a \in B$ quindi $a \in B \cup A$. ■

Grazie alla proprietà associativa 2, si può scrivere semplicemente $A \cup B \cup C$ senza fare uso di parentesi.

1.5.3 Intersezione

Definizione 1.5.8 *Siano A e B sottoinsiemi di U. Si definisce **intersezione** di A e B e si denota con $A \cap B$ (figura 1.4), il sottoinsieme di U di tutti gli elementi che appartengono contemporaneamente ad A e a B. In simboli si ha:*

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Se due insiemi sono privi di elementi comuni, cioè:

$$A \cap B = \emptyset,$$

essi si dicono disgiunti.

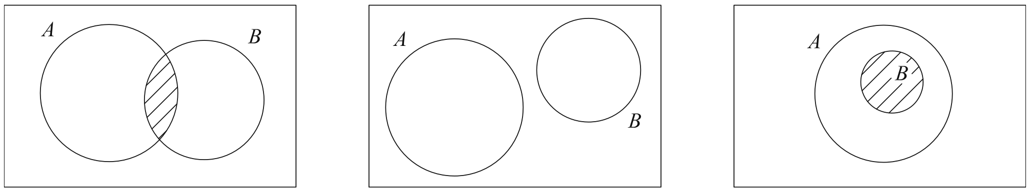

Figura 1.4: Intersezione

Esempio 1.5.9 *Siano* $A = \{0, 2, 3, 7\}$ *e* $B = \{2, 3, 10\}$ *allora si ha:*

$$A \cap B = \{2, 3\}.$$

Proprietà 1.5.10 *Siano* A, B *e* C *insiemi.*

1. $A \cap B = B \cap A$ *proprietà commutativa;*
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *proprietà associativa;*
3. $A \cap A = A$ *proprietà di idempotenza;*
4. $A \cap \emptyset = \emptyset$ *proprietà dell'elemento neutro;*
5. $A \cap U = A$ *proprietà dell'elemento assorbente;*
6. $A \cap B = B \Longrightarrow B \subseteq A$*;*
7. $A \cap B \subseteq A$*.*

Grazie alla proprietà associativa 2 si può scrivere semplicemente $A \cap B \cap C$ senza fare uso di parentesi.
Per le operazioni che abbiamo definito valgono inoltre le seguenti proprietà, che consigliamo di dimostrare:

Proprietà 1.5.11 *Siano* A*,*B *e* C *sottoinsiemi di* U*.*

1. $A \cup (A \cap B) = A$ *proprietà di assorbimento;*
2. $A \cap (A \cup B) = A$ *proprietà di assorbimento;*

3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione;*

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione;*

5. $\mathcal{C}_U(A \cup B) = \mathcal{C}_U A \cap \mathcal{C}_U B$ *formula di De Morgan;*

6. $\mathcal{C}_U(A \cap B) = \mathcal{C}_U A \cup \mathcal{C}_U B$ *formula di De Morgan.*

1.5.4 Differenza

Definizione 1.5.12 *Siano A e B sottoinsiemi di U. Si definisce* ***differenza*** *di A e B e si denota con $A - B$ (figura 1.5), il sottoinsieme degli elementi di A che non appartengono a B. In simboli si ha:*

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Si osservi che se $B \subseteq A$ la differenza coincide con il complementare di B rispetto ad A.

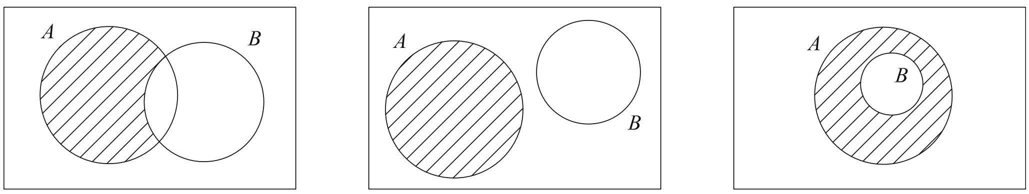

Figura 1.5: Differenza

Esempio 1.5.13 *Sia $A = \mathbb{N}$ e $B = \{0\}$ allora scriveremo:*

$$A - B = \mathbb{N}^*.$$

1.6 Partizione di un insieme

Definizione 1.6.1 *Sia A un insieme, e siano: $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n suoi sottoinsiemi. Si dice che essi formano una **partizione** di A se sono a due a due disgiunti e se la loro unione è A (figura 1.6). In simboli si ha:*

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \text{ è una partizione di } A \iff$$

$$A_i \cap A_j \ = \ \emptyset, \ \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ i \neq j \quad e \ \ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \ = \ A.$$

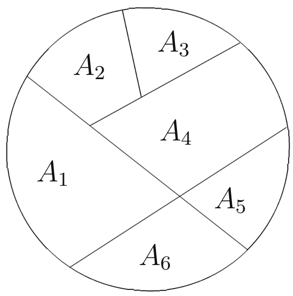

Figura 1.6: Partizione

Esempio 1.6.2 *Consideriamo l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, gli insiemi $\mathbb{N}_p$ ed $\mathbb{N}_d$, rispettivamente insieme dei numeri naturali pari e dispari, formano una partizione di $\mathbb{N}$.*

1.7 Prodotto cartesiano

Dati due qualsiasi elementi a e b, assumeremo come primitivo il concetto di coppia ordinata di primo elemento a e secondo elemento b e useremo il simbolo (a, b).
L'aggettivo "ordinata" sta ad indicare che è importante l'ordine in cui sono scritti gli elementi. Quindi si avrà: $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ e $b = d$.
Inoltre $(a, b) = (b, a) \iff a = b$.

Definizione 1.7.1 *Siano A e B due insiemi. Si dice* ***prodotto cartesiano****, o insieme prodotto di A e B, e si denota con $A \times B$, l'insieme i cui elementi sono tutte le coppie ordinate (x, y), con x elemento di A e y elemento di B. L'elemento x è detto prima coordinata e y seconda coordinata.*

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Esempio 1.7.2 *Siano $A = \{0, 1\}$ e $B = \{1, 2\}$ allora:*

$$A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}.$$

Proprietà 1.7.3 *Siano A e B insiemi, si ha:*

1. $A \times B \neq B \times A$
2. $A \times \emptyset = \emptyset$.

Esempio 1.7.4 *Siano $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{R}$. L'elemento $(\sqrt{2}, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ ma $(\sqrt{2}, 1) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ e quindi il prodotto cartesiano non gode della proprietà commutativa.*

Osservazione 1.7.5 *Se gli insiemi A e B sono lo stesso insieme. Allora il prodotto cartesiano è*

$$A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in A\}$$

e si denota con A^2.
Il caso più significativo è il prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$.
Più in generale, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ con $n \geq 2$ sono n insiemi assegnati, si chiama prodotto cartesiano di $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e lo si denota con il simbolo $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ l'insieme di tutte le n-ple aventi prima coordinata in A_1, seconda coordinata in A_2,......, n-sima coordinata in A_n, cioè:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n\}.$$

Se $A_i = \mathbb{R}$ si ottiene l'insieme:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ con } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

1.8 Esercizi

1. Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$, sono corrette le seguenti scritture:

$$2 \subset A, \quad \{1\} \subset A, \quad \emptyset \in A?$$

2. Considerati gli insiemi:

$$A = \{a, b, c, d\} \quad B = \{b, c\} \quad C = \{a, c\}$$

determinare

$A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A - B$, $B - C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$.

3. Rappresentare per elencazione gli elementi dei seguenti insiemi:

$\{x \in Z \,|\, 5 < x^2 < 45\}$, $\quad \{(-2)^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $\quad \left\{x \in Z \,|\, -\dfrac{20}{x} \in \mathbb{N}\right\}$,

$\{x \in Q \,|\, x^2 + 1 > 0\}$, $\quad \{x \in \mathbb{N} \,|\, x + 2 = 0\}$, $\quad \{x \in Z \,|\, x^2 = 16\}$,

$\{x \in \mathbb{N} \,|\, x - 4 < 0\}$.

4. Verificare che per ogni coppia A e B di insiemi risulta:

   (a) $A \subseteq A \cup B$, $\quad A \cap B \subseteq A$, $\quad A \cap B \subseteq A \cup B$ e dire quando si può sostituire il simbolo $\subseteq$ con il simbolo $=$;

   (b) $C_{A \cup B} A = B - A$, $\quad C_{A \cup B} B = A - B = C_A(A \cap B)$.

5. Avete 3 monete: la prima di 2 euro, la seconda di 1 euro e la terza di 50 centesimi. Quante e quali le somme che si possono ottenere?

6. Scrivere tutte le possibili partizioni di $A = \{1, 2, 3\}$.

7. Ad un esame di Matematica Generale hanno partecipato 100 candidati. Solo 10 hanno risolto tutti e tre gli esercizi assegnati. Chi ha risolto il primo esercizio ha risolto anche gli altri due, 15 hanno risolto solo il secondo e 25 solo il terzo. Se 20 hanno consegnato in bianco o non hanno risolto neppure un esercizio, quanti hanno risolto solo il secondo e terzo esercizio?

8. Se A è l'insieme delle squadre di calcio di serie A e la coppia (a_1, a_2), con $a_i \in A$, $i = 1, 2$, rappresenta l'incontro di calcio tra la squadra a_1 e la squadra a_2, A^2 è l'insieme degli incontri a fine campionato?

9. Dati gli insiemi:
$$A = \{1, 2, 3, 4\} \qquad B = \{7, 9, 10, 25, 36\}$$
scrivere tutte le coppie (a, b) dell'insieme $A \times B$ per cui a è un divisore di b.

10. Si considerino le seguenti affermazioni:
    (a) Essere un tringolo isoscele è condizione sufficiente per essere equilatero.
    (b) Essere un triangolo equilatero è condizione sufficiente per essere isoscele.
    (c) Essere un triangolo isoscele è condizione necessaria per essere equilatero.
    (d) Essere un triangolo equilatero è condizione necessaria per essere equiangolo.

    Riconoscere quali sono le proposizioni vere.

11. Pierino possiede tre pantaloni, uno nero, uno marrone e uno blu e quattro maglioni, uno bianco, uno giallo, uno rosso, uno viola.
    Se $P = \{n, m, b\}$ indica l'insieme dei pantaloni e $M = \{b, g, r, v\}$ l'insieme dei maglioni quante le possibili combinazioni pantalone-maglione può indossare Pierino?

12. Per la seconda settimana di gennaio sono previsti gli appelli di Matematica Generale, Economia Politica, Diritto Privato, Informatica e Ragioneria. Determinare in quante diverse combinazioni di discipline è possibile sostenere l'esame.

13. Scrivere la negazione di:
    (a) Ogni sera vado a cinema.
    (b) Quest'anno ho giocato al totocalcio ogni giovedì.

Capitolo 2

Insiemi numerici e funzioni

2.1 Insiemi numerici

In questo capitolo presenteremo il caso in cui il generico insieme A abbia come elementi i numeri. Non presenteremo la costruzione dei diversi insiemi numerici ma sinteticamente la loro struttura.
Sia $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ l'insieme dei numeri naturali e $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
Nell'insieme $\mathbb{N}$ sono definite due operazioni interne, la **somma** e il **prodotto**, che godono delle seguenti proprietà:

Proprietà 2.1.1 *Siano $x, y, z \in \mathbb{N}$:*

1. $x + y = y + x$; $\quad x \cdot y = y \cdot x$ *proprietà commutativa;*
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$; $\quad (xy)z = x(yz)$ *proprietà associativa;*
3. *esistono in $\mathbb{N}$ due numeri naturali, 0 (elemento neutro per la somma) e 1 (elemento neutro per la moltiplicazione), tali che:*

$$x + 0 = 0 + x = x; \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x;$$

4. $x(y + z) = xy + xz$ *proprietà distributiva.*

Nell'insieme $\mathbb{N}$ è definita una **relazione d'ordine** $\leq$ che gode delle proprietà:

Proprietà 2.1.2 *Siano* $x, y, z \in \mathbb{N}$*:*

1. $x \leq x$ *proprietà riflessiva;*

2. $x \leq y$ *e* $y \leq x \Rightarrow x = y$ *proprietà antisimmetrica;*

3. $x \leq y$ *e* $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ *proprietà transitiva;*

4. $x \leq y$ *oppure* $y \leq x$ *proprietà di totale ordine.*

Se $x \leq y$ e $x \neq y$ allora si può scrivere $x < y$ e si legge x strettamente minore di y.
Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali non sempre è vero che:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{N} \;\; \exists\, z \in \mathbb{N} \text{ t.c. } x + z = y$$

cioè l'operazione di sottrazione tra x e y non è sempre possibile. Da ciò nasce l'esigenza di estendere l'insieme dei numeri naturali all'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Naturalmente vale $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.
Nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi sono definite due operazioni interne: la **somma** e il **prodotto** e una relazione d'ordine $\leq$ e valgono le stesse proprietà viste per l'insieme dei numeri naturali.
Con l'insieme $\mathbb{Z}$ si risolve il problema della sottrazione tra due numeri naturali ma in questo insieme non sempre è vero che:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z} \;\; \exists\, z \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } x = y \cdot z.$$

Da ciò nasce l'esigenza di estendere l'insieme dei numeri interi all'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, ossia l'insieme i cui elementi sono del tipo $\dfrac{x}{y}$ con $x, y \in \mathbb{Z}$, e $y \neq 0$.
Naturalmente vale $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Per questo insieme sono definite le operazioni di somma e prodotto oltre alla relazione d'ordine $\leq$.
L'insieme dei numeri razionali non è ancora sufficientemente "grande". Dovremo ora operare un ulteriore ampliamento e rinunciando ad una trattazione esauriente e rigorosa non rinunceremo a dare un'idea, seppure intuitiva, di quali siano state le motivazioni che hanno portato alla costruzione dei numeri reali. Consideriamo il problema: trovare la misura, d, della diagonale

di un quadrato di lato di misura 1. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo si ha:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Si può dimostrare che non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2. Infatti se d fosse razionale si avrebbe $d = \dfrac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ e potremmo supporre m e n primi tra di loro.
Seguirebbe $d^2 = 2 = \dfrac{m^2}{n^2}$ e quindi $m^2 = 2n^2$, da cui m^2 risulterebbe pari, quindi m pari. Allora $m = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$ e $4k^2 = 2n^2$ da cui $n^2 = 2k^2$, quindi anche n^2 pari e quindi n pari. Allora m e n pari contro l'ipotesi m e n primi tra di loro.
Quindi d è un "nuovo" numero: irrazionale. Più in generale possiamo dire che per la risoluzione di equazioni algebriche l'insieme $\mathbb{Q}$ può risultare insufficiente. Abbiamo bisogno di estendere i numeri razionali all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Naturalmente vale $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. L'insieme $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ è detto insieme dei numeri irrazionali.
Sono irrazionali i numeri che si ottengono come radici quadrate di numeri naturali non quadrati. L'insieme dei numeri irrazionali non si riduce comunque alle sole radici quadrate di interi non quadrati ma è un insieme ben più vasto. Ad esempio π, rapporto tra la lunghezza di una circonferenza ed il suo diametro, è un numero irrazionale non ottenibile con l'estrazione di radice, analogamente per il numero di Nepero che vedremo in seguito.
La scoperta della non razionalità di d ebbe delle sorprendenti conseguenze sul piano geometrico. Se infatti si riporta con il compasso la diagonale di un quadrato di lato 1 su una retta orientata si trova un punto che non corrisponde ad alcun valore razionale (figura 2.1), questo significa che se si assume il lato del quadrato come unità di misura la diagonale non è misurabile "esattamente". Quindi i numeri razionali anche se infinitamente "densi" sulla retta lasciano dei "buchi" corrispondenti ai numeri irrazionali, i quali sono "accerchiati" da numeri razionali che si "addensano" sia alla loro destra sia alla loro sinistra. Per esempio:

$$1 < 1,4 < 1,41 < 1,414 < \sqrt{2} < 1,415 < 1,42 < 1,5 < 2.$$

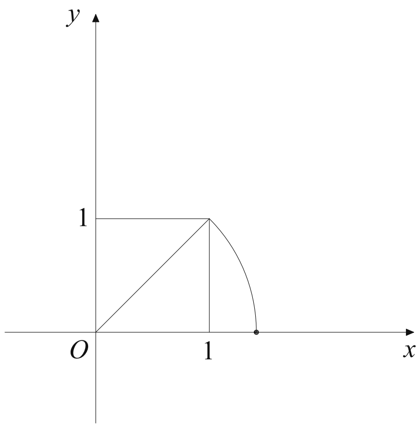

Figura 2.1: Rappresentazione grafica di $\sqrt{2}$

A questo punto come abbiamo fatto per gli altri insiemi numerici presenteremo le proprietà dei numeri reali.

Nell'insieme $\mathbb{R}$ le due operazioni di **somma** e **prodotto** godono delle seguenti proprietà:

Proprietà 2.1.3 *Siano* $x, y, z \in \mathbb{R}$*:*

1. $(x+y)+z = x+(y+z); \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *proprietà associativa;*

2. $x+y = y+x; \quad x \cdot y = y \cdot x$ *proprietà commutativa;*

3. $\exists\ 0 \in \mathbb{R} \ni' x+0 = 0+x = x$ *esistenza dell'elemento neutro per la somma;*

4. $\exists\ 1 \in \mathbb{R} \ni' x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ *esistenza dell'elemento neutro per il prodotto;*

5. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists |\ x' \in \mathbb{R} \ni' x + x' = 0$ *esistenza del simmetrico per la somma;*

6. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ \exists |\ x'' \in \mathbb{R} \ni' x \cdot x'' = 1$ *esistenza del simmetrico per il prodotto;*