CAPITOLO 1

Integrali

1.1 Integrali indefiniti

1.1.1. Esercizi svolti

1 Calcolare:

$$\int \left(3x^3 + 5\sqrt{x} - \frac{2}{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{x^4}\right) \mathrm{d}x$$

Soluzione

Occorre calcolare l'integrale della somma di più funzioni.

Applichiamo il *teorema di linearità*, in base al quale si ha:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\ \mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned}
&\int \left(3x^3 + 5\sqrt{x} - \frac{2}{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{x^4}\right) \mathrm{d}x = \\
&= \int 3x^3\,\mathrm{d}x + \int 5\sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{4}{x^4}\,\mathrm{d}x = \\
&= 3\int x^3\,\mathrm{d}x + 5\int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - 3\int x^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x + 4\int x^{-4}\,\mathrm{d}x^{(1)}
\end{aligned}$$

(1) Si ricordi che $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ e $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}}$.

Ora possiamo calcolare la primitiva di ciascuna delle funzioni assegnate, applicando la regola di integrazione delle funzioni potenza[(2)]:

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ per } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

Quindi:

$$\int \left(3x^3 + 5\sqrt{x} - \frac{2}{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{x^4}\right) \mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^4 + \frac{10}{3}\sqrt{x^3} - 2\ln|x| - 9\sqrt[3]{x} - \frac{4}{3x^3} + c$$

2 Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \,\mathrm{d}x$$

Soluzione

L'integrale è riconducibile alla tipologia[(3)]:

$$\int f'(x) \cdot f^n(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\left[f(x)\right]^{n+1} + c \ (n \neq -1)$$

Quindi:

$$\int \underbrace{\operatorname{sen}^3 x}_{f^n(x)} \underbrace{\cos x}_{f'(x)} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + c$$

3 Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1} \,\mathrm{d}x$$

---

(2) La tabella delle primitive di alcune funzioni elementari è contenuta nella tabella 1 dell'appendice A.

(3) Nella tabella 2 sono contenute alcune formule di sostituzione immediata (casi più frequenti).

Soluzione

L'integrale è riconducibile alla tipologia:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$$

Se calcoliamo però la derivata del denominatore, abbiamo:

$$f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$$

Occorre quindi moltiplicare e dividere per 2 l'integrale:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + 1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln(\mathrm{e}^{2x} + 1) + c$$

4 Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int x^3 \mathrm{e}^{x^4} \, \mathrm{d}x$$

Soluzione

L'integrale è riconducibile alla tipologia:

$$\int f'(x)\mathrm{e}^{f(x)} \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{f(x)} + c$$

Come nel caso precedente, se calcoliamo la derivata dell'esponente otteniamo:

$$f'(x) = 4x^3$$

Occorre quindi moltiplicare e dividere per 4 l'integrale, ottenendo:

$$\frac{1}{4} \int 4x^3 \mathrm{e}^{x^4} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x^4} + c$$

5 Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+2}} \, \mathrm{d}x$$

Soluzione

Questo integrale risulta "complicato" dalla presenza di $\sqrt{x+2}$ al denominatore della funzione integranda.

Possiamo utilizzare il metodo d'integrazione per sostituzione per semplificare tale funzione. Poniamo quindi:

$$\sqrt{x+2} = t$$

Ricaviamo:

$$x = t^2 - 2$$

Ricordiamo inoltre che, se abbiamo

$$x = g(t)$$

allora

$$\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$$

che nel nostro caso equivale a:

$$\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t^2-2}{t} 2t\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int t^2 - 2\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left(\int t^2\,\mathrm{d}t - 2\int \,\mathrm{d}t\right) \\ &= 2\left(\frac{t^3}{3} - 2t\right) + c\end{aligned}$$

Torniamo ora alla variabile x:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - 4\sqrt{x+2} + c = \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2} - 4\sqrt{x+2} + c$$

6 Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int x^n \ln x\,\mathrm{d}x \text{ (per } n \neq -1)$$

Soluzione

Applichiamo il metodo di integrazione per parti:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x^n}_{v'(x)} \underbrace{\ln x}_{u(x)}\,\mathrm{d}x &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c
\end{aligned}$$

7 Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$$

Soluzione

Applichiamo nuovamente il metodo di integrazione per parti (per due volte):

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x^2}_{u(x)} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x &= -x^2 \operatorname{sen} x - 2 \left[\int \left(\underbrace{-x}_{u(x)} \underbrace{\cos x}_{v'(x)} \right) \mathrm{d}x \right] \\
&= -x^2 \operatorname{sen} x + 2 \left[x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \right] \\
&= -x^2 \operatorname{sen} x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + c
\end{aligned}$$

In alternativa, è possibile usare il metodo detto "*tabular integration*" che consente di calcolare integrali di questo tipo in modo più rapido[(4)].

Il primo passo della procedura, dopo aver scelto come prima $u(x)$ e $v'(x)$, consiste nel costruire una tabella nella quale si inseriscono, rispettivamente, $u(x)$ nella prima colonna (D) e $v'(x)$ nella seconda (I). Si deriva poi la $u(x)$ fino ad ottenere 0 come valore della derivata e si integra $v'(x)$ per altrettante volte:

D	I
x^2	$\operatorname{sen} x$
$2x$	$-\cos x$
2	$-\operatorname{sen} x$
0	$\cos x$

Il secondo passo consiste nell'inserire, davanti alla prima colonna, una colonna contenente alternativamente i segni $+$ e $-$, partendo dal segno $+$:

Segno	D	I
$+$	x^2	$\operatorname{sen} x$
$-$	$2x$	$-\cos x$
$+$	2	$-\operatorname{sen} x$
$-$	0	$\cos x$

Infine, si moltiplica ogni elemento della prima colonna (fino alla penultima riga) per l'elemento della seconda colonna (appartenente alla riga successiva), seguendo le frecce, e si ottiene il risultato finale:

[(4)] Il metodo proposto semplifica notevolmente la risoluzione dell'integrale se la funzione integranda è espressa sotto forma di prodotto di un polinomio di grado n per una funzione esponenziale o trigonometrica.

Segno	D	I
$+$	x^2	$\operatorname{sen} x$
$-$	$2x$	$-\cos x$
$+$	2	$-\operatorname{sen} x$
$-$	0	$\cos x$

Quindi

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + c$$

8 Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int x^3 \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$$

Soluzione

Anche in questo caso, possiamo applicare nuovamente il metodo di integrazione per parti (per tre volte):

$$\int \underbrace{x^3}_{u(x)} \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{v'(x)} \, \mathrm{d}x = \left(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6\right) \mathrm{e}^{-x} + c$$

In alternativa, applicando il metodo di "*tabular integration*", otteniamo:

Segno	D	I
$+$	x^3	e^{-x}
$-$	$3x^2$	$-\mathrm{e}^{-x}$
$+$	$6x$	e^{-x}
$-$	6	$-\mathrm{e}^{-x}$
$+$	0	e^{-x}

Quindi

$$\int x^3 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6\right)\mathrm{e}^{-x} + c$$

9 Calcolare:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 3}\,\mathrm{d}x$$

Soluzione

La funzione integranda è razionale fratta. Inoltre, il polinomio al numeratore è di grado superiore a quello del denominatore, quindi possiamo utilizzare il metodo della *divisione tra polinomi:*

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & & & & & \overbrace{}^{D(x)} \\
x^4 & -2x^3 & +3x^2 & -x & -2 & x^2 - 4x + 3 \\ \cline{6-6}
-\,x^4 & +4x^3 & -3x^2 & & & \underbrace{x^2 + 2x + 8}_{Q(x)} \\ \cline{1-5}
// & +2x^3 & // & -x & -2 & \\
 & -2x^3 & +8x^2 & -6x & & \\ \cline{2-5}
 & // & +8x^2 & -7x & -2 & \\
 & & -8x^2 & +32x & -24 & \\ \cline{3-5}
 & & & // & \underbrace{+25x - 26}_{R(x)} &
\end{array}$$

Sappiamo che:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

quindi possiamo riscrivere l'integrale come:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 1}{x^2 - 4x + 3}\,\mathrm{d}x &= \int \left(x^2 + 2x + 8 + \frac{25x - 26}{x^2 - 4x + 3}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^3}{3} + x^2 + 8x + \underbrace{\int \frac{25x - 26}{x^2 - 4x + 3}\,\mathrm{d}x}_{I_2}
\end{aligned}$$

Calcoliamo ora l'integrale I_2, usando il metodo della decomposizione in frazioni parziali. Scomponiamo innanzitutto il denominatore in fattori primi:

$$\frac{25x - 26}{x^2 - 4x + 3} = \frac{25x - 26}{(x - 1)(x - 3)}$$

Il denominatore ha radici reali e distinte, quindi la frazione può essere scomposta come segue:

$$\begin{aligned}\frac{25x-26}{(x-1)(x-3)} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)}\\ &= \frac{Ax-3A+Bx-B}{(x-1)(x-3)}=\frac{x(A+B)-3A-B}{(x-1)(x-3)}\end{aligned}$$

In base al *principio di identità dei polinomi*, abbiamo:

$$\begin{cases}A+B=25\\ -3A-B=-26\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=\frac{1}{2}\\ B=\frac{49}{2}\end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}I_2 &= \int \frac{25x-26}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x+\frac{49}{2}\int\frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{49}{2}\ln|x-3|\end{aligned}$$

Abbiamo pertanto:

$$\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x-1}{x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+x^2+8x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{49}{2}\ln|x-3|+c$$

10 Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{4x+1}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x$$

Soluzione

Il denominatore della frazione proposta è il quadrato del binomio $(2x-1)$. Il denominatore ha in questo caso radici reali e coincidenti.

Procediamo come nel caso precedente alla scomposizione in frazioni parziali:

$$\frac{4x+1}{(2x-1)^2}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{(2x-1)^2}=\frac{2Ax-A+B}{(2x-1)^2}$$

Applichiamo come prima il *principio di identità dei polinomi*, ottenendo:

$$\begin{cases}2A=4\\ -A+B=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=2\\ B=3\end{cases}$$

Quindi:

$$\int \frac{4x+1}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2}{2x-1}+\int\frac{3}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln|2x-1| + \frac{3}{2}\int 2(2x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln|2x-1| - \frac{3}{2(2x-1)} + c
\end{aligned}
$$

In alternativa, è possibile usare il metodo di *sostituzione*, ponendo:

$$2x-1 = t \Rightarrow x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$$

L'integrale diventa quindi:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{4x+1}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{4\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)+1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2t+3}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{3}{2}\int t^{-2}\,\mathrm{d}t = \ln|t| - \frac{3}{2t} + c \\
&= \ln|2x-1| - \frac{3}{2(2x-1)} + c
\end{aligned}
$$

11 Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{2x^2-3}{x^3-3x^2+4}\,\mathrm{d}x$$

Soluzione

Occorre innanzitutto scomporre in fattori primi il denominatore.

Possiamo utilizzare anche in questo caso la *regola di Ruffini.*

Il denominatore ammette sicuramente come divisore il binomio $(x+1)$, quindi si ha:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & +1 & -3 & 0 & +4 \\
-1 & & -1 & +4 & -4 \\
\hline
 & 1 & -4 & +4 & 0
\end{array}
$$

Pertanto risulta:

$$\int \frac{2x^2-3}{x^3-3x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x^2-3}{(x+1)(x^2-4x+4)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x^2-3}{(x+1)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$$