# Introduzione

In un articolo diventato giustamente famoso, scritto in latino nel lontano 1738, Daniel Bernoulli afferma di non trovare irragionevole che un povero possa essere disposto a cedere per novemila ducati un biglietto della lotteria che, con la stessa probabilità, gli fa guadagnare zero oppure ventimila ducati. Successivamente considera un mercante di nome Sempronio, il quale possiede beni nel suo paese per un valore di quattromila ducati. In aggiunta, possiede alcuni beni all'estero che sarebbe in grado di vendere per ottomila ducati, una volta arrivati nel suo paese. Decide di spedirli via mare, conscio del fatto che di dieci navi che partono, una non arriva a destinazione. Bernoulli afferma che se Sempronio spedisse tutti i beni attualmente all'estero su una nave, la sua valutazione di tali beni sarebbe di 6.751 ducati, mentre se ne spedisse metà con una nave e metà con un'altra sarebbe di 7.033 ducati. Infine, considera un altro mercante, Caio, il quale ha acquistato beni ad Amsterdam che sarebbe in grado di vendere a San Pietroburgo per diecimila rubli. Il mercante è consapevole del fatto che di cento navi che salpano da Amsterdam con destinazione San Pietroburgo, cinque non arrivano a destinazione. Bernoulli ritiene che Caio dovrebbe essere disposto a pagare un premio di ottocento rubli per assicurare il carico solo se, in aggiunta a quei beni, possedesse una ricchezza inferiore a 5.043 rubli. Ci sarebbe poi qualcuno disposto ad assicurare Caio solo se la sua ricchezza fosse superiore a 14.243 rubli.

Questi esempi, opportunamente re-interpretati in chiave moderna, illustrano con esemplare chiarezza tre concetti fondamentali in economia finanziaria: l'avversione al rischio, il beneficio della diversificazione visto come dominanza stocastica del secondo ordine e l'avversione assoluta al rischio decrescente come possibile causa di nascita di un mercato. Esempi numerici simili possono aiutare a comprendere altri concetti e risultati, quali il beneficio di trasferire risorse tra stati del mondo mediante *Arrow's securities*, l'esistenza di operazioni di arbitraggio con prezzi non di equilibrio e la preferenza, a parità di premio, per un'assicurazione con franchigia rispetto a una parziale.

Molti manuali di economia finanziaria includono un certo numero di esempi numerici, riconoscendone implicitamente la loro importanza. In alcuni casi, sono discussi brevemente nel testo. Più spesso, sono proposti come esercizi da risolvere. Condivido questa scelta, dettata anche da una necessità di compattezza. Tuttavia, dalla mia esperienza didattica, ho anche imparato che esiste un numero non marginale di studenti che, sebbene iscritti a una laurea magistrale, hanno non poche difficoltà a effettuare le manipolazioni matematiche spesso necessarie per risolvere gli esercizi. Non difettano della conoscenza teorica, ma della pratica. Immagino che questo possa essere vero anche per molti dei lettori di questo volume che non siano studenti universitari.

Il lavoro è strutturato in domande, immediatamente seguite dalle risposte. La prima parte della risposta si occupa in genere di ottenere la soluzione numerica del problema, spesso con un numero di passaggi irritante per chi conosce bene la matematica. Chiedo venia, ma in questo modo tutti i lettori hanno la possibilità di passare alla seconda parte della risposta, sicuramente molto più stimolante, con la quale si interpretano economicamente i risultati numerici ottenuti. Questa seconda parte richiede una conoscenza, talvolta anche approfondita, di concetti e risultati di economia finanziaria che, a livello universitario, sono generalmente acquisiti in corsi di laurea magistrale. Mi permetto a questo proposito di suggerire quattro ottimi manuali, purtroppo tutti in lingua inglese, ai quali aggiungo un interessante volume che dà una visione anche storica dei contributi principali della letteratura economico-finanziaria. Alcuni degli esercizi qui proposti sono tratti dai primi tre manuali, ma la maggior parte sono originali.

Eeckhoudt Louis, Gollier Christian, Schlesinger Harris (2005): *Economic and Financial Decisions under Risk*, Princeton University Press

Danthine Jean–Pierre, Donaldson John B. (2015): *Intermediate Financial Theory*, terza ed., Elsevier

Van Zandt Timothy (2006): *Introduction to the Economics of Uncertainty and Information*, non pubblicato, ma ottenibile in formato pdf inviando una mail all'autore

Bikhchandani Sushil, Hirshleifer Jack, Riley John G. (2013): *The Analytics of Uncertainty and Information*, seconda ed., Cambridge University Press

Rubinstein Mark (2006): *A History of the Theory of Investments*, John Wiley & Sons

# Capitolo 1

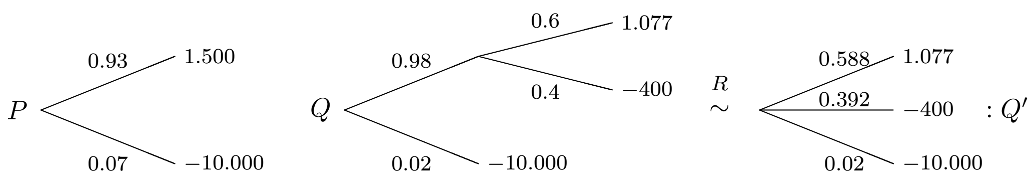
# Teoria delle decisioni

1.1. Avete deciso di investire 10.000 euro in obbligazioni governative, con un orizzonte temporale di un anno. Il vostro consulente finanziario vi ha proposto due alternative:
(i) un titolo, espresso in euro, caratterizzato da un tasso di interesse del 15%, emesso da un paese che ha una probabilità di *default* del 7%. Ipotizzate che, in caso di *default*, perderete tutto il capitale investito. Sia $P$ la lotteria che descrive questo titolo, espressa in termini di «guadagni e perdite».
(ii) un titolo, espresso in valuta locale, caratterizzato da un tasso di interesse del 20%, emesso da un paese che ha una probabilità di *default* del 2%. Il tasso di cambio odierno è 12 (un euro vale dodici unità della valuta locale). Il vostro consulente ritiene che tra un anno, quando venderete il titolo, c'è una probabilità 0.6 che il tasso di cambio sarà 13 e una probabilità 0.4 che sarà 15. Sia $Q$ la lotteria che descrive questo titolo, espressa in termini di «guadagni e perdite» (in euro).
Scrivete le lotterie $P$ e $Q$. Utilizzate poi gli assiomi di transitività, di riduzione di lotterie composte e di indipendenza per «semplificare» il confronto tra le due lotterie.

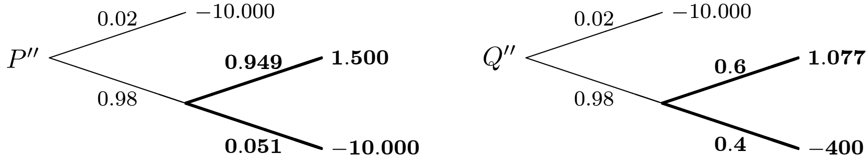
*Soluzione*

Se acquistate il primo titolo, con probabilità 0.93 guadagnerete $0.15 \cdot 10.000 = 1.500$ euro, mentre con probabilità 0.07 perderete 10.000 euro. Il primo titolo può essere descritto come una lotteria semplice, cioè come una distribuzione di probabilità sui possibili guadagni e perdite in euro.
Se acquistate il secondo titolo, dovrete dapprima convertire 10.000 euro in valuta locale. Otterrete in tal modo $12 \cdot 10.000 = 120.000$ unità di valuta locale. Con probabilità 0.98 otterrete tra un anno $120.000\,(1 + 0.20) = 144.000$ unità di valuta locale. Con probabilità 0.6 convertirete questa valuta in $144.000/13 = 11.077$ euro. In questo caso, avrete guadagnato $11.077 - 10.000 = 1.077$ euro. Con probabilità 0.4 otterrete invece $144.000/15 = 9.600$ euro e subirete quindi una perdita di 400 euro. Infine, con probabilità 0.02 perderete tutto il capitale investito, cioè 10.000 euro. Il secondo titolo può invece essere descritto come una lotteria composta: dapprima c'è la lotteria che determina se la cedola del 20% verrà pagata; successivamente, nel caso in cui venga pagata, c'è la lotteria che determina il tasso di cambio, e quindi il vostro guadagno in euro.

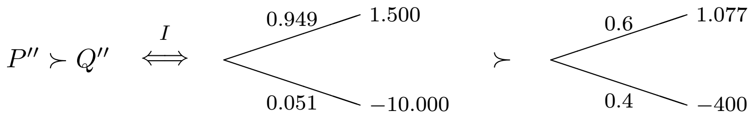
Le prime due lotterie della figura seguente sono le lotterie $P$ e $Q$. La terza è invece una lotteria «equivalente», in termini di probabilità e di conseguenze, alla lotteria $Q$.




Nella lotteria $Q$, la probabilità di guadagnare 1.077 euro è $0.98 \cdot 0.6 = 0.588$, la probabilità di perdere 400 euro è $0.98 \cdot 0.4 = 0.392$ e la probabilità di perdere 10.000 euro è 0.02. La lotteria $Q'$ è quindi «equivalente», in termini di probabilità e di conseguenze, alla lotteria $Q$. Per l'assioma di riduzione di lotterie composte ($R$), dovreste essere indifferenti tra queste due lotterie (simbolo $\sim$ nella figura).
L'assioma di indipendenza permette talvolta di «semplificare» la scelta tra lotterie, in quanto consente di trascurare le «parti comuni» di tali lotterie.
Scriviamo a tale proposito (nella figura seguente) due lotterie $P''$ e $Q''$, «equivalenti», in termini di probabilità e di conseguenze, alle lotterie $P$ e $Q'$, nelle quali isoliamo nel ramo in alto la «parte comune» di tali lotterie, ovvero la conseguenza $-10.000$ con probabilità 0.02 (la probabilità più bassa: $0.02 < 0.07$).
Dato il ramo in alto delle due lotterie, poiché la somma delle probabilità dei rami dello stesso «livello» deve essere uguale a uno, la probabilità associata al ramo in basso dovrà essere uguale a 0.98.
Nella lotteria $P$, la probabilità di perdere 10.000 euro è 0.07, ed è quindi superiore a 0.02 (probabilità associata al ramo in alto della lotteria $P''$). Affinché $P''$ sia «equivalente», in termini di probabilità e di conseguenze, a $P$, una delle conseguenze del ramo in basso della lotteria $P''$ dovrà essere $-10.000$. L'altra dovrà ovviamente essere 1.500.
Nel ramo in basso della lotteria $P''$, tracciamo quindi un ramo che conduce alla conseguenza 1.500 (probabilità $x$) e uno che conduce alla conseguenza $-10.000$ (probabilità $1-x$). Nella lotteria $P$, la probabilità di guadagnare 1.500 euro è 0.93. Affinché ciò sia vero anche nella lotteria $P''$, si dovrà avere $0.98x = 0.93$, cioè $x = 0.94898$.
Poiché $P$ e $P''$ hanno le stesse conseguenze (1.500 e $-10.000$) e poiché la probabilità di ottenere 1.500 è la stessa nelle due lotterie, anche la probabilità di ottenere $-10.000$ sarà la stessa. Sebbene non necessario, possiamo verificarlo: $0.02 + 0.98\,(1 - 0.94898) = 0.07$.
Operando in modo analogo, si ottiene la lotteria $Q''$, che è peraltro identica alla lotteria $Q$.



L'assioma di indipendenza ($I$) ci permette di trascurare le «parti comuni» delle lotterie $P''$ e $Q''$ (rami in alto nella figura sopra). $P''$ dovrà quindi essere preferita a $Q''$ se e solo se (simbolo $\Leftrightarrow$ nella figura sotto) la prima lotteria in grassetto è preferita alla seconda.




Vogliamo ora dimostrare che, data la transitività delle preferenze, $P \succ Q$ se e solo se $P'' \succ Q''$.
Ipotizziamo dapprima che $P \succ Q$. Da $P'' \sim P$, $P \succ Q$, $Q \sim Q'$ e $Q' \sim Q''$, per la transitività delle preferenze, $P'' \succ Q''$. Abbiamo quindi dimostrato che

$$P \succ Q \Rightarrow P'' \succ Q'' \text{ ( } \Rightarrow = \text{implica).} \tag{1.1}$$

Ipotizziamo ora che $P'' \succ Q''$. Da $P \sim P''$, $P'' \succ Q''$, $Q'' \sim Q'$ e $Q' \sim Q$, per la transitività delle preferenze, $P \succ Q$. Abbiamo quindi dimostrato che

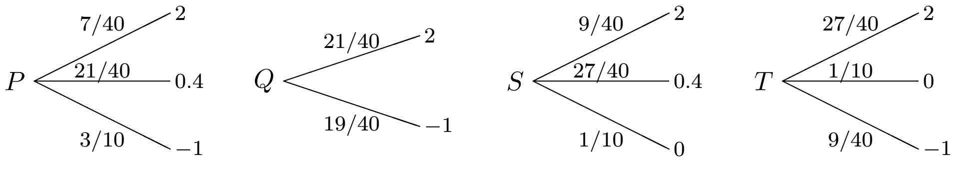
$$P'' \succ Q'' \Rightarrow P \succ Q \text{ ( } \Rightarrow = \text{implica).} \tag{1.2}$$

Dalle relazioni (1.1) e (1.2), si ha che

$$P \succ Q \Leftrightarrow P'' \succ Q'' \text{ ( } \Leftrightarrow = \text{implica ed è implicato; se e solo se).}$$

La scelta tra $P$ e $Q$ è «equivalente» alla scelta tra $P''$ e $Q''$. L'assioma di indipendenza vi ha permesso quindi di «semplificare» il problema di scelta ($Q$ ha tre possibili conseguenze, mentre $Q''$ ne ha due). Dovrete «solo» essere in grado di dire se preferite guadagnare 1.500 euro con una probabilità molto elevata (vicina al 95%), con un rischio abbastanza modesto (di poco superiore al 5%) di perdere una cifra rilevante (10.000 euro), oppure vi «accontentate» di una probabilità inferiore (il 60%) di guadagnare una cifra un po' più bassa (1.077 euro), con un rischio peraltro non così modesto (il 40%) di perdere una cifra però decisamente più accettabile (400 euro). Ciò dipenderà ovviamente dalle vostre preferenze (*de gustibus non est disputandum*).

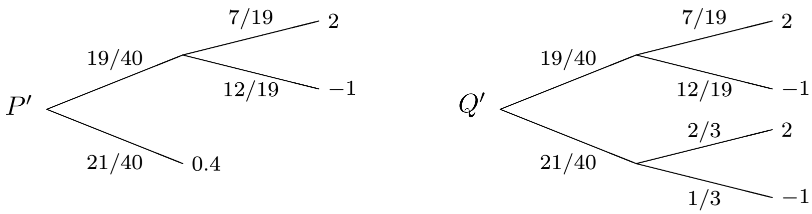
1.2. Date le quattro lotterie seguenti,




utilizzate gli assiomi di riduzione di lotterie composte e di indipendenza per mostrare che, con preferenze transitive,

$$P \succ Q \Leftrightarrow S \succ T \text{ ( } \Leftrightarrow \text{ = se e solo se).}$$

*Soluzione*
L'assioma di indipendenza ci permette talvolta di «semplificare» il problema di scelta tra due lotterie, in quanto ci consente di trascurare le «parti comuni» di tali lotterie.
Consideriamo dapprima la scelta tra le lotterie $P$ e $Q$. La «parte comune» di queste due lotterie è rappresentata dalla conseguenza 2 con probabilità 7/40 (la probabilità più bassa: $7/40 < 21/40$) e dalla conseguenza $-1$ con probabilità 3/10 (la probabilità più bassa: $3/10 < 19/40$). Ne consegue che la «parte non comune» della lotteria $P$ è costituita dalla sola conseguenza 0.4 con probabilità 21/40. Scriviamo questa «parte non comune» della lotteria $P$ nel ramo in basso della lotteria $P'$ nella figura seguente. Poiché la somma delle probabilità di rami allo stesso «livello» deve essere uguale a uno, la probabilità associata al ramo in alto dovrà essere 19/40.
Noi vogliamo fare in modo che $P'$ sia «equivalente», in termini di probabilità e di conseguenze, alla lotteria $P$. Per far questo, dal ramo in alto della lotteria $P'$ dovranno dipartirsi altri due rami che condurranno alle conseguenze 2 e $-1$. Siano $z$ e $1-z$ le probabilità associate a questi due rami. Poiché nella lotteria $P$ la conseguenza 2 è ottenuta con probabilità 7/40, il valore di $z$ dovrà essere tale che $19/40z = 7/40$, cioè $z = 7/19$. Per differenza, si ottiene la probabilità dell'altro ramo della lotteria $P'$: $1 - z = 12/19$.




Operiamo ora in modo analogo per la lotteria $Q$. Abbiamo visto che il ramo in alto della lotteria $P'$ rappresenta le «parti comuni» delle lotterie $P$ e $Q$. Possiamo pertanto riprodurlo tale e quale nella lotteria $Q'$. Questo è il ramo che verrà trascurato quando applicheremo l'assioma di indipendenza. La «parte non comune» della lotteria $Q$ è invece la conseguenza 2 con probabilità 7/20 (differenza tra 21/40 e «parte comune» 7/40) e la conseguenza $-1$ con probabilità 7/40 (differenza tra 19/40 e 3/10). Dal ramo in basso (al quale sarà necessariamente associata la probabilità 21/40, in quanto la somma delle probabilità dei rami che si trovano allo stesso «livello» deve essere uguale a uno) si dipartiranno perciò altri due rami che condurranno alle conseguenze 2 e $-1$. Siano $w$ e $1 - w$ le probabilità associate a questi due rami. Si dovrà avere $21/40w = 7/20$, cioè $w = 2/3$, da cui $1 - w = 1/3$. Abbiamo in questo modo ottenuto la lotteria $Q'$, la quale è «equivalente», in termini di probabilità e di conseguenze, alla lotteria $Q$.
Per l'assioma di riduzione di lotterie composte, $P \sim P'$ e $Q \sim Q'$. Ne consegue che, con preferenze transitive, la lotteria $P$ è preferita alla lotteria $Q$ se e solo se la lotteria $P'$ è preferita alla lotteria $Q'$. Dimostriamolo formalmente, per la seconda e ultima volta.
Ipotizziamo dapprima che $P \succ Q$. Da $P' \sim P$, $P \succ Q$ e $Q \sim Q'$, per la transitività delle preferenze, $P' \succ Q'$. Abbiamo quindi dimostrato che

$$P \succ Q \Rightarrow P' \succ Q' \text{ ( } \Rightarrow = \text{implica).} \tag{1.3}$$

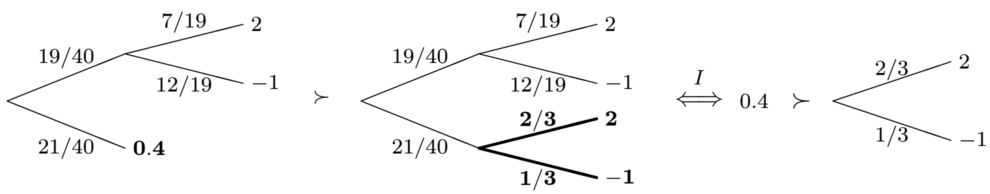
Ipotizziamo ora che $P' \succ Q'$. Da $P \sim P'$, $P' \succ Q'$ e $Q' \sim Q$, per la transitività delle preferenze, $P \succ Q$. Abbiamo quindi dimostrato che

$$P' \succ Q' \Rightarrow P \succ Q \;(\Rightarrow = \text{implica}). \tag{1.4}$$

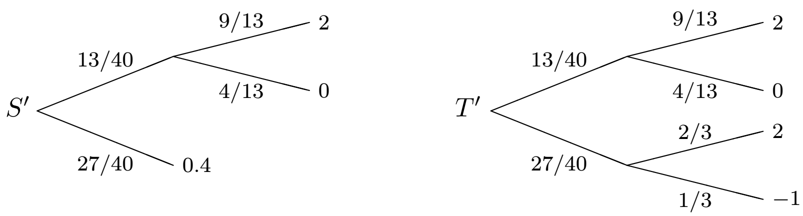
Dalle relazioni (1.3) e (1.4), si ha che

$$P \succ Q \Leftrightarrow P' \succ Q' \;(\Leftrightarrow = \text{implica ed è implicato; se e solo se}).$$

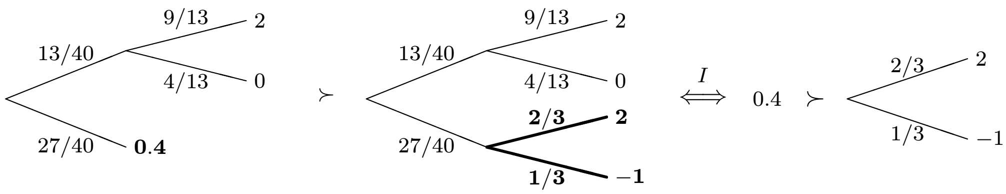
La scelta tra le lotterie $P'$ e $Q'$ può essere «semplificata» trascurando la «parte comune» di queste due lotterie (rami in alto delle prime due lotterie) e limitandosi a confrontare le parti in grassetto.




Possiamo concludere che dovremmo preferire la lotteria $P$ alla lotteria $Q$ se e solo se preferiamo ricevere con certezza (probabilità uno) 0.4 piuttosto che partecipare a una lotteria che con probabilità 2/3 paga 2 e con probabilità 1/3 paga −1.
Operando in modo analogo per le lotterie $S$ e $T$, costruiamo le lotterie $S'$ e $T'$ della figura seguente. La «parte comune» delle lotterie $S$ e $T$ è rappresentata dalla conseguenza 2 con probabilità 9/40 (la probabilità più bassa: $9/40 < 27/40$) e dalla conseguenza 0 con probabilità 1/10 (stessa probabilità nelle lotterie $S$ e $T$). Scriviamo tale «parte comune» nei rami in alto delle lotterie $S'$ e $T'$. I rami in basso descrivono invece la «parte non comune» delle lotterie $S$ e $T$. Accertatevi di avere ben compreso come sono state ottenute le lotterie $S'$ e $T'$. Verificate poi che queste due lotterie sono «equivalenti», in termini di probabilità e di conseguenze, alle lotterie $S$ e $T$.



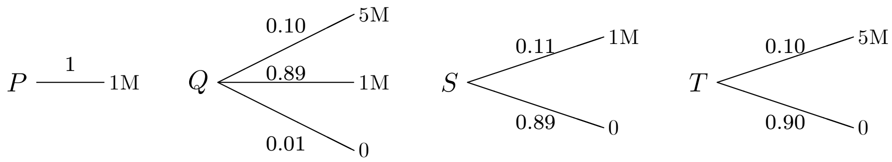

Per la transitività delle preferenze, $S \succ T \Leftrightarrow S' \succ T'$. Il confronto tra queste ultime lotterie può essere «semplificato» utilizzando l'assioma di indipendenza ($I$), il quale richiede di trascurare, nella figura seguente, i rami in alto delle lotterie $S'$ e $T'$ e di concentrare l'attenzione sulle parti in grassetto.




Dovremmo quindi preferire la lotteria $S$ alla lotteria $T$ se e solo se preferiamo ricevere con certezza (probabilità uno) 0.4 piuttosto che partecipare a una lotteria che con probabilità 2/3 paga 2 e con probabilità 1/3 paga −1.
Questo era esattamente lo stesso confronto che ci permetteva di dire se dovevamo preferire $P$ a $Q$. Possiamo pertanto concludere che

$$P \succ Q \Leftrightarrow S \succ T.$$

1.3. Date le quattro lotterie seguenti, con valori espressi in milioni di euro ($M$),




utilizzate il teorema di von Neumann e Morgenstern per mostrare che

$$P \succ Q \Leftrightarrow S \succ T \ (\Leftrightarrow \ = \text{se e solo se}).$$

*Soluzione*
Per il teorema di von Neumann e Morgenstern,

$$P \succ Q \Leftrightarrow EU(P) > EU(Q)\,.$$

L'ultima relazione vale se e solo se

$$1 \cdot u(1M) > 0.10u(5M) + 0.89u(1M) + 0.01u(0),$$

cioè se e solo se

$$0.11u(1M) > 0.10u(5M) + 0.01u(0). \tag{1.5}$$

Operando in modo analogo,

$$S \succ T \Leftrightarrow EU(S) > EU(T)\,.$$

L'ultima relazione vale se e solo se

$$0.11u(1M) + 0.89u(0) > 0.10u(5M) + 0.90u(0),$$

cioè se e solo se

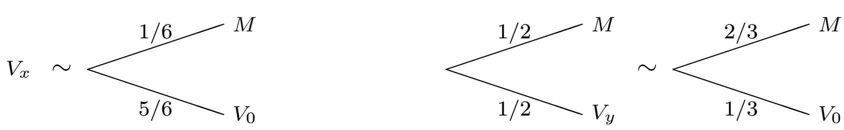
$$0.11u(1M) > 0.10u(5M) + 0.01u(0). \tag{1.6}$$

Le condizioni (1.5) e (1.6) sono identiche. Abbiamo pertanto dimostrato che

$$P \succ Q \Leftrightarrow S \succ T.$$

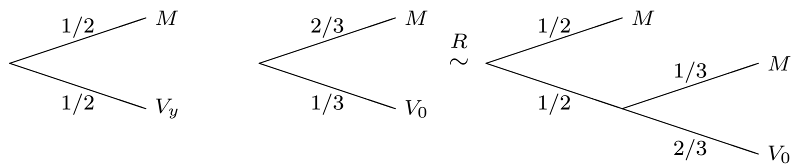
1.4. Siete costretti a giocare alla *roulette russa* con una rivoltella il cui tamburo può contenere al massimo 6 proiettili. Dovrete premere il grilletto una sola volta. Sia $N$ il numero di proiettili inseriti nel tamburo.
Prima di giocare, vi viene data l'opportunità di eliminare *una* delle pallottole contenute nel tamburo della rivoltella in cambio di un corrispettivo monetario. Siano $x$ e $y$ gli ammontari *massimi* che sareste disposti a pagare per eliminare *una* pallottola se, rispettivamente, $N = 1$ e $N = 4$.
La vostra ricchezza iniziale è $W_0$. Nel caso in cui sopravviviate, le vostre preferenze sono monotone nella vostra ricchezza, cioè preferite avere una ricchezza più elevata rispetto a una più modesta. Preferite poi vivere piuttosto che morire.
(a) Ipotizzate che, nel caso in cui moriate, *non* siate interessati alla vostra ricchezza (per esempio, non avete eredi).
Utilizzate gli assiomi di transitività, di riduzione di lotterie composte e di indipendenza per mostrare che $y > x$, cioè dovreste essere disposti a pagare di più per eliminare *una* pallottola quando nel tamburo ci sono quattro pallottole rispetto a quando ce ne è una sola.

*Soluzione*
Sia $V_k$ la conseguenza «vivere con una ricchezza $W_0 - k$» e $M$ la conseguenza «morire». Per definizione di ammontare *massimo* che sareste disposti a pagare per eliminare una pallottola dal tamburo della rivoltella nel caso in cui $N = 1$, dovrete essere *indifferenti* tra pagare $x$ euro ed eliminare l'unica pallottola presente (in questo caso, con probabilità uno la conseguenza sarà $V_x$) e non pagare (in questo caso, con probabilità 1/6 la conseguenza sarà $M$, mentre con probabilità 5/6 sarà $V_0$). Analogamente, nel caso in cui $N = 4$, dovrete essere indifferenti tra pagare $y$ euro ed eliminare *una* delle quattro pallottole contenute nel tamburo della rivoltella (in questo caso, rimarranno tre pallottole nel tamburo; di conseguenza, con probabilità $3/6 = 1/2$ la conseguenza sarà $M$, mentre con probabilità 1/2 sarà $V_y$) e non pagare (in questo caso, con probabilità $4/6 = 2/3$ la conseguenza sarà $M$, mentre con probabilità 1/3 sarà $V_0$). La figura seguente mostra queste due relazioni di indifferenza.



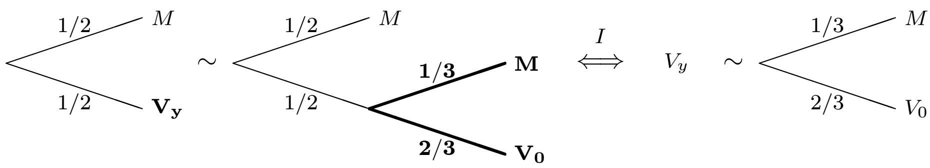

Nella prima relazione, le conseguenze delle due lotterie sono tutte diverse. L'assioma di indipendenza non ci permette quindi di «semplificare» tale relazione. Ciò è invece

possibile nella seconda relazione.
Concentriamoci sulla seconda relazione di indifferenza (terza e quarta lotteria). Desideriamo isolare la «parte comune» delle due lotterie, cioè la conseguenza $M$ con probabilità $1/2$ (la probabilità più bassa: $1/2 < 2/3$). Utilizziamo a tale proposito l'assioma di riduzione di lotterie composte per scrivere due lotterie «equivalenti», in termini di probabilità e di conseguenze, alla terza e alla quarta lotteria della figura precedente, tali che il ramo in alto di entrambe contenga la conseguenza $M$ con probabilità $1/2$. Questo ci permetterà di applicare l'assioma di indipendenza.
La terza lotteria «isola» nel ramo in alto la «parte comune» delle due lotterie. La «parte non comune», costituita dalla conseguenza $V_y$ con probabilità $1/2$ delle due lotterie, è descritta nel ramo in basso. Non dobbiamo pertanto utilizzare l'assioma di riduzione di lotterie composte, ma ci limiteremo a riscrivere tale lotteria (prima lotteria nella figura che segue).
Consideriamo ora la quarta lotteria. Avendo «isolato» nel ramo in alto la «parte comune» delle due lotterie, la probabilità associata al ramo in basso deve necessariamente essere uguale a $1/2$, in quanto la somma delle probabilità di rami allo stesso «livello» deve essere uguale a uno. A questo punto, non possiamo limitarci a scrivere $V_0$, in quanto la probabilità di tale conseguenza nella quarta lotteria non è $1/2$, bensì $1/3$. Inoltre, la probabilità di $M$ nella quarta lotteria non è $1/2$, bensì $2/3$. Dobbiamo pertanto aggiungere una nuova lotteria, le cui conseguenze sono $M$ (probabilità $z$) e $V_0$ (probabilità $1 - z$). Il valore di $1 - z$ deve essere tale che $1/2\,(1 - z) = 1/3$ (probabilità della conseguenza $V_0$ nella quarta lotteria della figura precedente), cioè $z = 1/3$. Otteniamo in tal modo la relazione di indifferenza nella parte destra della figura seguente ($R$ = assioma di riduzione di lotterie composte).



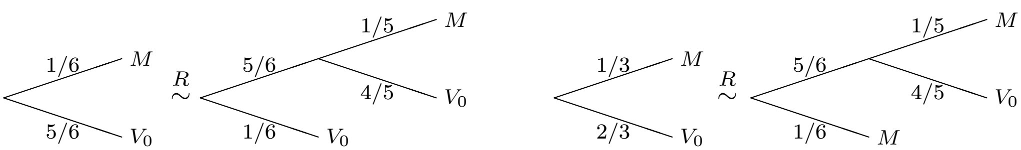

Vale forse la pena di notare che, avendo verificato che nell'ultima lotteria la probabilità di ottenere $V_0$ è $1/3$, la probabilità di ottenere $M$ (l'unica altra conseguenza della lotteria) sarà $2/3$, cioè la probabilità di ottenere $M$ nella quarta lotteria della penultima figura. Per sicurezza, verifichiamolo: $1/2 + 1/2 \cdot 1/3 = 2/3$.

Per definizione di $V_y$, siete indifferenti tra la prima e la seconda lotteria dell'ultima figura. In base all'assioma di riduzione di lotterie composte, dovrete poi essere indifferenti tra la seconda e la terza lotteria. Di conseguenza, per l'assioma di transitività, dovrete essere indifferenti tra la prima e la terza lotteria.
La prima e la terza lotteria dell'ultima figura sono state costruite in modo che il ramo in alto delle due lotterie sia lo stesso. Questo ci permette di utilizzare l'assioma di indipendenza.



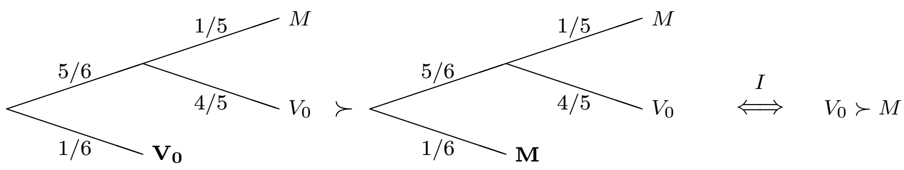

Possiamo notare come, sia nel caso di $V_x$ sia in quello di $V_y$, siate indifferenti tra una lotteria nella quale vivete con probabilità uno, ma dovete pagare una certa cifra di denaro (rispettivamente, $x$ e $y$), e una lotteria nella quale con una certa probabilità morite (rispettivamente, $1/6$ e $1/3$), mentre con la probabilità complementare ($5/6$ e $2/3$) vivete senza pagare nulla.


Per la transitività delle preferenze, dovrete preferire $V_x$ a $V_y$ se e solo se preferite la seconda lotteria alla quarta. La seconda lotteria sembra decisamente più «appetibile», in quanto è caratterizzata da una maggiore probabilità di vivere senza pagare nulla e da una minore probabilità di morire. E voi preferite vivere piuttosto che morire!
Vogliamo ora dimostrare formalmente che voi dovrete preferire la seconda lotteria alla quarta. Per far questo, «isoliamo» la «parte comune» delle due lotterie, cioè la conseguenza $M$ con probabilità $1/6$ (la probabilità più bassa: $1/6 < 1/3$) e la conseguenza $V_0$ con probabilità $2/3$ (la probabilità più bassa: $2/3 < 5/6$). Questa «parte comune» è descritta dal ramo in alto della seconda e della quarta lotteria della figura seguente. La probabilità di ottenere $M$ è $5/6 \cdot 1/5 = 1/6$ (come desiderato) e la probabilità di ottenere $V_0$ è $5/6 \cdot 4/5 = 2/3$ (come desiderato).




È facile verificare che le due relazioni di indifferenza sono giustificate dall'assioma di riduzione di lotterie composte ($R$). Per capire come sono state costruite la seconda e la quarta lotteria, possiamo dapprima notare che la «parte *non* comune» della prima lotteria è $V_0$ con probabilità $1/6$ (differenza tra $5/6$ e «parte comune», cioè $2/3$). Questa «parte *non* comune» è descritta nel ramo in basso della seconda lotteria. Poiché la somma delle probabilità di rami allo stesso «livello» deve essere uguale a uno, la probabilità associata al ramo in alto dovrà essere $5/6$. Le conseguenze della «parte comune» sono $M$ e $V_0$. Tracciamo quindi due rami le cui conseguenze sono $M$ (probabilità $z$) e $V_0$ (probabilità $1 - z$). Nella «parte comune», la conseguenza $M$ è ottenuta con probabilità

1/6. Si dovrà pertanto avere $5/6z = 1/6 \Rightarrow z = 1/5$, da cui $1-z = 4/5$. Questo completa la seconda lotteria. Un discorso analogo ci permette di ottenere la quarta lotteria.
Per la transitività delle preferenze, dovrete preferire la prima lotteria alla terza se e solo preferite la seconda lotteria alla quarta.
La seconda e la quarta lotteria sono state costruite, lo ribadiamo, in modo che il ramo in alto descriva la «parte comune» della prima e della terza lotteria. Esso è quindi identico nelle due lotterie. Ciò ci permette di applicare l'assioma di indipendenza (I), il quale richiede di confrontare le parti in grassetto.




Poiché $V_0 \succ M$ (preferite vivere senza pagare nulla piuttosto che morire), in base all'assioma di indipendenza dovrete dunque preferire la prima lotteria (che per voi è indifferente a $V_x$) alla seconda (che per voi è indifferente a $V_y$).
Possiamo quindi concludere che

$$V_x > V_y,$$

cioè dovrete preferire vivere con una ricchezza $W_0 - x$ piuttosto che vivere con una ricchezza $W_0 - y$.
Le vostre preferenze (quando vivete) sono monotone nella vostra ricchezza. Di conseguenza, preferite $W_0 - x$ a $W_0 - y$ se e solo se

$$W_0 - x > W_0 - y \Leftrightarrow x < y.$$

Dovreste pertanto essere disposti a pagare di meno per eliminare *una* pallottola quando nel tamburo c'è una sola pallottola rispetto a quando ce ne sono quattro.

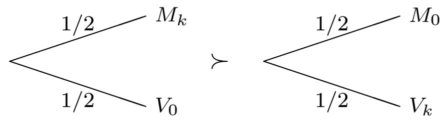
(b) Considerate ora il caso in cui le vostre preferenze sono monotone nella vostra ricchezza anche nel caso in cui morite (per esempio, avete un erede). Ipotizzate che, data una lotteria nella quale con probabilità 0.5 vivete e con probabilità 0.5 morite, se dovete scegliere in quale stato del mondo perdere un certo ammontare di denaro, preferite perderlo quando morite. Utilizzate il teorema di von Neumann e Morgenstern per mostrare che, anche in questo caso, $y > x$.

*Soluzione*
Sia $M_k$ la conseguenza «morire con una ricchezza $W_0 - k$». Utilizziamo ora il teorema di von Neumann e Morgenstern per scrivere le equazioni che definiscono $V_x$ e $V_y$ (l'indifferenza tra lotterie richiede l'uguaglianza delle utilità attese).

$$1 \cdot u(V_x) = \frac{1}{6}u(M_0) + \frac{5}{6}u(V_0) \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{2}u(M_y) + \frac{1}{2}u(V_y) = \frac{2}{3}u(M_0) + \frac{1}{3}u(V_0) \tag{1.8}$$

L'ipotesi




presuppone che, dovendo perdere $k$ euro, preferiate perderli quando morite piuttosto che quando vivete (con stati del mondo equiprobabili). In un certo senso, preferite avere voi $k$ euro piuttosto che lasciarli ai vostri eredi! Ne consegue, per il teorema di von Neumann e Morgenstern, che

$$\frac{1}{2}u\left(M_k\right)+\frac{1}{2}u\left(V_0\right)>\frac{1}{2}u\left(M_0\right)+\frac{1}{2}u\left(V_k\right),$$

che può essere riscritto come

$$u\left(M_k\right)>u(V_k)-u\left(V_0\right)+u\left(M_0\right).$$

Consideriamo ora un valore particolare di $k$, cioè $k=y$ (ammontare massimo che sareste disposti a pagare per eliminare una pallottola quando nel tamburo ci sono quattro pallottole). Dalla relazione precedente, ponendo $k=y$, esisterà un valore $\delta_y>0$ tale che

$$u\left(M_y\right)=u(V_y)-u\left(V_0\right)+u\left(M_0\right)+\delta_y.$$

Inseriamo ora tale espressione nell'equazione che definisce $V_y$ (EQ. (1.8)):

$$\frac{1}{2}\left(u(V_y)-u\left(V_0\right)+u\left(M_0\right)+\delta_y\right)+\frac{1}{2}u(V_y)=\frac{2}{3}u(M_0)+\frac{1}{3}u(V_0),$$

che, dopo opportune semplificazioni, diventa

$$u(V_y)=\frac{1}{6}u(M_0)+\frac{5}{6}u(V_0)-\frac{1}{2}\delta_y. \tag{1.9}$$

Dalle EQQ. (1.7) e (1.9), si ottiene

$$u\left(V_x\right)>u\left(V_y\right).$$

In base al teorema di von Neumann e Morgenstern, dovrete quindi preferire vivere con una ricchezza $W_0-x$ piuttosto che con una ricchezza $W_0-y$. Data l'ipotesi di monotonicità delle vostre preferenze, questo è vero se e solo se

$$x<y.$$

Anche in questo caso, dovreste essere disposti a pagare di meno per eliminare *una* pallottola quando nel tamburo c'è una sola pallottola rispetto a quando ce ne sono quattro.