Paolo De Angelis
Roberto De Marchis
Mario Marino
Antonio Luciano Martire

LEZIONI DI MATEMATICA FINANZIARIA

Seconda edizione

IUSTITIAM COLIMUS
G. Giappichelli Editore

LEZIONI DI
MATEMATICA FINANZIARIA

Paolo De Angelis
Roberto De Marchis
Mario Marino
Antonio Luciano Martire

LEZIONI DI MATEMATICA FINANZIARIA

Seconda edizione

IUSTITIAM COLIMUS
G. Giappichelli Editore

© Copyright 2021 - G. GIAPPICHELLI EDITORE - TORINO
VIA PO, 21 - TEL. 011-81.53.111 - FAX 011-81.25.100
http://www.giappichelli.it

ISBN/EAN 978-88-921-3845-2

Stampa: Rotolito S.p.A. - Pioltello (MI)

Le fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941, n. 633.

Le fotocopie effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque per uso diverso da quello personale possono essere effettuate a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da CLEA-Redi, Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali, Corso di Porta Romana 108, 20122 Milano, e-mail autorizzazioni@clearedi.org e sito web www.clearedi.org.

Prefazione

A quasi due anni dalla prima edizione, questa seconda, revisionata ed arricchita di un ulteriore capitolo sulle opzioni finanziarie, nasce dall'esigenza di raccogliere i suggerimenti raccolti nel corso delle lezioni grazie al confronto con gli studenti.
Il piano dell'opera, rimasto invariato nella struttura, è frutto dell'esperienza didattica pluriennale nell'insegnamento della Matematica Finanziaria da parte dei Proff. Paolo De Angelis e Roberto De Marchis, coadiuvati dal Dott. Mario Marino e dal Dott. Antonio Luciano Martire, presso la Facoltà di Economia della Sapienza Università di Roma.
Il testo, scritto interamente in LaTeX, si pone anche come utile compendio didattico di facile utilizzo per gli studenti della Facoltà di Economia.

Gli Autori

Roma, febbraio 2021

Capitolo 1

Le operazioni finanziarie

1.1 Introduzione alle operazioni finanziarie

La matematica finanziaria identifica l'ambito della matematica applicata dedita allo studio, alla modellizzazione e alla valutazione delle operazioni finanziarie.
Partendo da un'adeguata conoscenza dei principali strumenti matematici, lo step iniziale di analisi è quello di definire e comprendere le operazioni finanziarie.
In generale, per **operazione finanziaria** intendiamo ogni tipo di accordo che produce una variazione di capitale per effetto dello scambio di importi monetari esigibili in istanti di tempo diversi.
Gli elementi chiave che delineano una generica operazione finanziaria sono:

- *lo scambio di importi monetari*: un'operazione finanziaria nasce nel momento in cui sussiste almeno uno scambio di importi monetari, il cui valore sia definito secondo una medesima unità monetaria di misura (valuta);

- *il differimento temporale degli importi monetari*: gli importi monetari oggetto di scambio sono esigibili in istanti di tempo diversi e il loro confronto potrà avvenire correttamente solo se tali importi fossero riferiti ad una medesima epoca. Questo significa che il valore degli importi monetari non rimane immutato al trascorrere del tempo, ma subisce una variazione per effetto del "prezzo" del tempo sul denaro.

Per fissare questi concetti primari, poniamo di seguito un semplice esempio. Consideriamo due individui, Tizio e Caio. Tizio è un individuo parsimonioso e dispone di un risparmio monetario, mentre Caio ha l'esigenza di reperire denaro. Tizio decide di prestare a Caio una somma pari a 1000 euro, che quest'ultimo si impegna a restituire in un'unica soluzione tra un anno. I due individui hanno posto in essere un'operazione finanziaria: si ha uno scambio di importi temporalmente differiti. Questa operazione può essere analizzata sotto due punti di vista:

- nell'ottica di Tizio, è stato sostenuto un esborso monetario iniziale di 1000 euro per ricevere un importo futuro (incasso del credito) esigibile tra 1 anno;
- nell'ottica di Caio, è stato conseguito un introito di 1000 euro a fronte dell'impegno di corrispondere un importo futuro (restituzione del debito) tra 1 anno.

In tale scambio, Tizio perde la disponibilità monetaria di 1000 euro per un anno (oltre a correre il rischio di mancata restituzione). Pertanto, in quanto soggetto razionale, egli chiederà a Caio un importo monetario aggiuntivo rispetto al denaro inizialmente prestato: si forma in tal modo una ricompensa che misura il *valore temporale del denaro*, il c.d. *interesse*.
Considerando il valore temporale del denaro, i 1000 euro disponibili oggi non sono confrontabili direttamente con i 1000 euro disponibili tra un anno: i 1000 euro disponibili oggi saranno confrontabili, in quanto *equivalenti*, solo ai 1000 euro accresciuti degli interessi relativi all'anno trascorso.
La matematica finanziaria interviene nell'operazione di scambio formalizzando le leggi matematiche con le quali misurare il valore temporale degli importi, rendendoli confrontabili ed equivalenti, purché il confronto sia definito rispetto ad un medesimo istante temporale.
L'esempio esposto, seppur banale, è idoneo a rappresentare diverse situazioni della realtà economica quotidiana. Ad esempio, possiamo pensare a Tizio come un istituto di credito che concede un prestito finanziario al cliente Caio; ancora, Tizio è un investitore che impiega il proprio risparmio in un titolo obbligazionario, che non paga cedole, emesso da Caio; e molte altre.
Operativamente, le operazioni finanziarie sono accordi compiuti all'interno del c.d. *mercato dei capitali*, quale luogo atto alla negoziazione tra operatori economici che offrono e altri che domandano capitali.
Nel mercato dei capitali, le due principali categorie di operatori economici sono dette prenditori di fondi e prestatori di fondi. I primi sono coloro che hanno l'esigenza di reperire disponibilità monetarie, ovvero versano in una situazione di deficit di ricchezza, e pertanto domandano denaro nel mercato; i secondi, per contro, sono coloro che dispongono di un surplus di ricchezza e sono disponibili ad impiegare il loro denaro in eccesso offrendolo nel mercato.

Il trasferimento di ricchezza da operatori in surplus a operatori in deficit avviene per mezzo di diversi strumenti di carattere finanziario. Tra i tanti strumenti finanziari negoziabili, particolare menzione è data ai titoli finanziari: essi sono contratti che garantiscono al possessore il diritto, negoziabile in appositi segmenti del mercato di capitali, di ricevere introiti futuri. Casi esemplificativi e comuni di titoli finanziari sono le azioni, negoziate all'interno del mercato azionario, le obbligazioni, negoziate all'interno del mercato obbligazionario, e gli strumenti monetari, negoziati all'interno del mercato monetario.
Nella sostanza, gli strumenti finanziari si presentano a tutti gli effetti come operazioni finanziarie e, in quanto tali, analizzati per mezzo della matematica finanziaria.
Passiamo ora ad esporre una definizione formale di operazione finanziaria. Indichiamo con:

- $\underline{\boldsymbol{x}} = \{x_0; x_1; \ldots; x_n\}$ il vettore degli importi monetari;
- $\underline{\boldsymbol{t}} = \{t_0; t_1; \ldots; t_n\}$ il vettore delle epoche di esigibilità degli importi monetari. Tale vettore definisce lo scadenzario temporale dell'operazione finanziaria, in cui poniamo che $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ e $1 < n < \infty$.

Denoteremo una generica operazione finanziaria come una coppia di vettori $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$ a componenti reali:

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{x_0; \ldots; x_n\} \,/\, \{t_0; \ldots; t_n\} = \{(x_0; t_0); \ldots; (x_n; t_n)\} \tag{1.1}$$

in modo tale che l'operazione finanziaria sia espressa come una successione di importi e delle rispettive epoche di esigibilità: ogni k-esima componente della coppia $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$ è letta come "importo monetario x_k esigibile all'epoca t_k", per $k = 0, \ldots, n$.
Ad ogni operazione finanziaria è possibile associare un'illustrazione grafica, detta *diagramma importi-epoche*:

Importi	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Epoche	t_0	t_1	t_2	$\cdots$	t_n

Interpretiamo l'epoca t_0 come l'istante iniziale dell'operazione finanziaria, mentre con t_n indicheremo l'istante finale o scadenza. La differenza $(t_n - t_0)$ restituisce l'intera durata dell'operazione finanziaria.

Dal punto di vista della variabile "tempo", si deve tener conto anche dell'epoca rispetto alla quale avviene la valutazione degli importi costituenti l'operazione finanziaria. L'epoca di valutazione potrà coincidere con l'epoca iniziale, con l'epoca finale o potrà essere un qualsiasi instante di tempo $t \in (t_0; t_n)$, nonché un instante di tempo $t > t_n$. Al variare dell'epoca di valutazione varierà il valore temporale attribuibile a ciascun importo monetario, al fine di mantenere l'equivalenza tra i diversi importi.
Per concludere, è utile precisare che le componenti dell'operazione finanziaria, ovvero gli importi monetari e le epoche, costituiscono le *grandezze fondamentali* della matematica finanziaria. Tutte le altre grandezze che incontreremo nel proseguo sono da considerarsi come derivate[1].

1.2 Tipologie di operazioni finanziarie

La definizione formale di operazione finanziaria data nel precedente paragrafo può essere specificata a seconda delle caratteristiche degli elementi della coppia $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$.
In particolare, possiamo delineare una classificazione delle diverse tipologie di operazioni finanziarie.
Innanzitutto, facendo riferimento al numero di importi/epoche della successione[2], si è soliti distinguere tra *operazioni finanziarie elementari* e *complesse*. Le prime riguardano lo scambio di due soli importi differiti nel tempo e, pertanto, la loro configurazione vettoriale è del tipo:

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{x_0; x_n\} / \{t_0; t_n\} = \{(x_0; t_0); (x_n; t_n)\}. \tag{1.2}$$

Diversamente, le operazioni finanziarie complesse sono costituite dallo scambio di più di due importi e la relativa rappresentazione vettoriale rimane la medesima data dalla (1.1).

Esempio 1.2.1 (Operazioni finanziarie semplici e complesse)**.** *Un'operazione elementare è del tipo:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{30; 100\} / \{0; 1\} = \{(30; 0); (100; 1)\}.$$

Tale operazione consiste nella disponibilità di un importo pari a 30 *euro al tempo* 0 *(istante iniziale), a cui corrisponde un importo pari a* 100 *euro tra un periodo (ad esempio un anno).*

[1] Sono grandezze finanziarie derivate il flusso $= \frac{\text{importo}}{\text{tempo}}$ e l'intensità $= \frac{\text{flusso}}{\text{importo}}$.
[2] Facciamo formalmente riferimento alla dimensione dei vettori $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$.

Diversamente, un'operazione complessa è del tipo:

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{10; -20; 500\} \,/\, \{0; 1; 3\} = \ \{(10; 0); (-20; 1); (500; 3)\} \,.$$

In questo caso l'operazione è complessa in quanto composta da più di due importi esigibili su istanti di tempo diversi.

Un'ulteriore classificazione è ottenibile prendendo a riferimento la successione dei segni degli importi monetari. Nello specifico, si distingue tra *operazioni finanziarie di investimento*, nelle quali gli esborsi monetari precedono le entrate, e *operazioni finanziarie di finanziamento*, nelle quali le entrate precedono gli esborsi.

Esempio 1.2.2 (Operazioni di investimento e di finanziamento)**.** *Un'operazione finanziaria del tipo:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-1400; 800; 1000\} \,/\, \{0; 1; 2\} = \ \{(-1400; 0); (800; 1); (1000; 2)\}$$

configura un investimento dato dall'impiego al tempo 0 *di* 1400 *euro, al fine di ottenere degli importi monetari in entrata nelle epoche future. Questa operazione può rappresentare allo stesso tempo un'operazione di finanziamento se vista nell'ottica della controparte dell'investitore:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{1400; -800; -1000\} \,/\, \{0; 1; 2\} = \ \{(1400; 0); (-800; 1); (-1000; 2)\} \,.$$

ovvero la controparte riceverà inizialmente un'entrata di 1400 *euro a fronte della quale corrispondere ai tempi futuri gli importi di* 800 *e* 1000 *euro.*

Un'altra importante distinzione è tra *operazioni finanziarie certe* e *operazioni finanziarie aleatorie*. L'operazione finanziaria può dirsi certa se importi ed epoche sono definiti a priori in quanto deterministici; per contro, un'operazione è aleatoria se almeno un importo monetario o un'epoca (o entrambi) non sono certi. In questo caso lo schema formale dell'operazione finanziaria acquisisce due nuovi vettori, chiamati rispettivamente $\underline{E}$ e $\underline{P}$:

- $\underline{E} = \{E_0; E_1; \ldots; E_n\}$ ha per elementi i c.d. "eventi". Un evento è una circostanza non determinabile a priori che può produrre effetti tanto sugli importi quanto sulle epoche dell'operazione finanziaria;
- $\underline{P} = \{P_0; P_1; \ldots; P_n\}$ è il vettore della *probabilità* con cui gli eventi possono verificarsi.

Nelle operazioni finanziarie aleatorie, gli elementi dei vettori $\underline{\boldsymbol{x}}$ e $\underline{\boldsymbol{t}}$ non sono più deterministici, bensì delle *variabili aleatorie*: ogni elemento k-esimo potrà assumere diversi possibili valori a seconda dell'evento che si realizzerà, tenuto conto della probabilità di verificarsi.

Esempio 1.2.3 (Operazioni finanziarie aleatorie e certe)**.** *Si consideri il caso di una banca che concede* 10000 *euro di finanziamento ad un cliente, con l'obbligo di quest'ultimo di restituire tra un anno l'importo di* 12000 *euro. La banca non è certa che il proprio cliente sia solvibile, per cui ipotizza due possibili eventi: Default, D, e No Default, ND. Tali eventi hanno rispettivamente probabilità* 5% *e* 95% *di verificarsi. Dunque, si identificano i seguenti due vettori:*

$$\underline{E} = \{E_0 = D,\ E_1 = ND\}\ ;\ \underline{P} = \{P_0 = 5\%; P_1 = 95\%\}\,.$$

Se si verifica l'evento "No Default" allora la banca incasserà 12000 *euro alla fine dell'anno, mentre se si verificherà l'evento di "Default" la banca non incasserà alcun importo.*
Dal punto di vista della banca, abbiamo un'operazione finanziaria elementare, d'investimento e aleatoria:

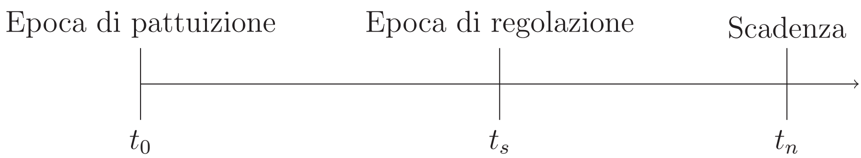
$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \left\{-10000; \tilde{Y}\right\} / \{0; 1\}$$

dove $\tilde{Y}$ *è la variabile aleatoria che rappresenta l'importo incerto che la banca incasserà a seconda del "credit event" che si verificherà:*

$$\tilde{Y} = \begin{cases} \mathit{12000} & \textit{con probabilità del 95\%} \\ \mathit{0} & \textit{con probabilità del 5\%.} \end{cases}$$

Nel caso di un'operazione finanziaria certa, $\tilde{Y}$ *avrebbe assunto uno ed un solo valore con certezza (probabilità del* 100%*), ovvero non sarebbe una variabile aleatoria, bensì deterministica.*

Maggior dettaglio sulle operazioni finanziarie aleatorie verrà dato nel Capitolo 8. Nel proseguo ci limiteremo ad esporre gli strumenti fondamentali della matematica finanziaria facendo riferimento alle sole operazioni finanziarie certe.
Una classificazione aggiuntiva ci porta a discernere tra le *operazioni finanziarie a pronti o spot* e le *operazioni finanziarie a termine o forward.* La diversità tra le due operazioni risiede nella possibilità che possa esistere un differimento temporale tra l'epoca rispetto alla quale iniziano ad essere scambiati gli importi e quella nella quale tali scambi sono pattuiti dalle parti dell'accordo. Tecnicamente, la distinzione in esame poggia sul seguente schema:



Nelle operazioni a pronti l'epoca di pattuizione e di regolazione coincidono, motivo per cui la successione di importi $\underline{\boldsymbol{x}}$ inizia a svilupparsi a partire dall'epoca t_0 e si ha che $t_s = t_0$. Nel caso delle operazioni a termine, le parti concorderanno gli scambi di importi all'epoca t_0, ma tali importi inizieranno ad essere effettivamente scambiati a partire dall'epoca s fino all'epoca t_n: l'intero accordo tra le parti ha durata $(t_n - t_0)$, ma l'operazione finanziaria di scambio avrà durata $(t_n - t_s)$.

Esempio 1.2.4 (Operazioni finanziarie spot e forward)**.** *Un'operazione finanziaria spot è del tipo*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-1400; 800; 1000\} \,/\, \{0; 1; 2\} = \{(-1400; 0); (800; 1); (1000; 2)\}$$

poiché al tempo $t_0 = 0$ *osserviamo sia la pattuizione che l'inizio dello scambio degli importi. Tale operazione finanziaria sarebbe a termine se, ad esempio, gli importi iniziassero ad essere esigibili a partire da un'epoca successiva,* $t_s = 1$*, e la pattuizione di questi avvenisse all'epoca* $t_0 = 0$*:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-1400; 800; 1000\} \,/\, \{1; 2; 3\} = \{(-1400; 1); (800; 2); (1000; 3)\}\,.$$

Avremo modo di riprendere questi due tipi di operazione finanziarie nel Capitolo 6, quando parleremo della struttura per scadenza dei tassi d'interesse. Fino ad allora, considereremo il solo caso delle operazioni finanziarie a pronti. Le operazioni finanziarie possono, inoltre, derivare dall'unione o dalla scomposizione di altre operazioni finanziarie. In particolare, definiamo:

- L'*operazione finanziaria somma.*

  Consideriamo due operazioni finanziarie $\underline{\boldsymbol{x}}'/\underline{\boldsymbol{t}}'$ e $\underline{\boldsymbol{x}}''/\underline{\boldsymbol{t}}''$. L'operazione finanziaria somma, $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$, è ottenuta operando l'unione insiemistica dei due scadenzari, $\underline{\boldsymbol{t}}'$ e $\underline{\boldsymbol{t}}''$, ridefinendo i vettori $\underline{\boldsymbol{x}}'$ e $\underline{\boldsymbol{x}}''$ sul nuovo scadenzario unione e, infine, sommando algebricamente i pagamenti esigibili alle diverse date.

- *La scomposizione di operazioni finanziarie.*

  Data un'operazione finanziaria $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$, la sua scomposizione consiste nella scissione in due o più operazioni finanziarie.

Esempio 1.2.5 (Somma e scomposizione di operazioni finanziarie)**.** *Siano date due operazioni finanziarie:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}'/\underline{\boldsymbol{t}}' = \{5; -10; 15\} \,/\, \{1; 3; 4\}$$

e

$$\underline{\boldsymbol{x}}''/\underline{\boldsymbol{t}}'' = \{-20; 30; 30\} \,/\, \{0; 1; 2\}\,.$$

L'operazione finanziaria somma, $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$*, si ottiene computando l'unione insiemistica degli scadenzari di partenza:*

$$\underline{\boldsymbol{t}} = \underline{\boldsymbol{t}}' \cup \underline{\boldsymbol{t}}' = \{1; 3; 4\} \cup \{0; 1; 2\} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

e, successivamente, ridefinendo i vettori $\underline{\boldsymbol{x}}'$ *e* $\underline{\boldsymbol{x}}''$ *sul nuovo scadenzario temporale:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}'/\underline{\boldsymbol{t}} = \{0; 5; 0; -10; 15\} \,/\, \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

e

$$\underline{\boldsymbol{x}}''/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-20; 30; 30; 0; 0\} \,/\, \{0; 1; 2; 3; 4\}\,.$$

Infine, la somma algebrica degli importi di $\underline{\boldsymbol{x}}'$ *e* $\underline{\boldsymbol{x}}''$ *esigibili sulle medesime date porta alla forma finale dell'operazione somma:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-20; 35; 30; -10; 15\} \,/\, \{0; 1; 2; 3; 4\}\,.$$

A partire da questa operazione, potremmo poi farne una scomposizione. Ad esempio, potremmo suddividerla in due operazioni finanziarie, una i cui importi abbiano segno positivo (solo entrate) e una i cui importi abbiano segno negativo (solo uscite):

$$\underline{\boldsymbol{w}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{0; 35; 30; 0; 0\} \,/\, \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

e

$$\underline{\boldsymbol{y}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-20; 0; 0; -10; 0\} \,/\, \{0; 1; 2; 3; 4\}\,.$$

La somma e la scomposizione delle operazioni finanziarie sono utili per la rappresentazione della successione di importi nel tempo dei c.d. *portafogli finanziari*, quali composizioni di singole operazioni finanziare: mediante la somma riusciamo a costruire il portafoglio finanziario e rappresentarlo per mezzo di un unico flusso di importi sullo scadenzario comune; mediante la scomposizione siamo in grado di discernere, in relazione al medesimo portafoglio, il complesso dei flussi in entrata e quelli in uscita con le rispettive epoche. Nell'esempio 1.2.5, l'operazione finanziaria $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$ configura gli importi generati da un portafoglio finanziario costituito dalle operazioni finanziarie $\underline{\boldsymbol{x}}'/\underline{\boldsymbol{t}}'$ e $\underline{\boldsymbol{x}}''/\underline{\boldsymbol{t}}''$; dal portafoglio $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$ possiamo poi identificare una configurazione di tipo *asset-liability*, separando le componenti di solo attivo, $\underline{\boldsymbol{w}}/\underline{\boldsymbol{t}}$, da quelle passive, $\underline{\boldsymbol{y}}/\underline{\boldsymbol{t}}$.

Infine, merita particolare menzione un'operazione finanziaria che gioca un ruolo centrale nella teoria finanziaria: l'*arbitraggio*.
Un arbitraggio è un'operazione finanziaria tale per cui l'operatore che la pone in essere realizza un profitto certo, ovvero senza esporre ad alcun rischio il capitale proprio. Pertanto, un arbitraggio è caratterizzato da una successione certa di importi tutti non-negativi, con almeno un importo strettamente positivo.
Torneremo con maggior dettaglio sulle operazioni di arbitraggio nel Capitolo 6. Quì ci limitiamo a osservare che, in un mercato di capitali ideale, ovvero caratterizzato da perfetta concorrenzialità, completezza e assenza di frizionalità, la possibilità di realizzare arbitraggi è rara, nonché temporanea. Pertanto, l'ipotesi di assenza di arbitraggio è una dei principi fondamentali nella valutazione degli strumenti finanziari, in particolare di carattere aleatorio, permettendo il raggiungimento di notevoli risultati in campo matematico-finanziario.

Esempio 1.2.6 (L'arbitraggio)**.** *Siano date due operazioni finanziarie:*

$$\underline{\boldsymbol{x}} \,/\, \underline{\boldsymbol{t}} = \{50; -100; -150\} \,/\, \{0; 1; 2\} \Longrightarrow \ \textit{operazione di finanziamento}$$

e

$$\underline{\boldsymbol{x}}' / \underline{\boldsymbol{t}}' = \{-50; 200; 200\} \,/\, \{0; 1; 2\} \Longrightarrow \ \textit{operazione di investimento.}$$

L'arbitraggio può essere visto come l'operazione finanziaria somma:

$$\underline{\boldsymbol{x}}'' / \underline{\boldsymbol{t}}'' = \{0; 100; 50\} \,/\, \{0; 1; 2\} \,.$$

È utile precisare che il principio di assenza di arbitraggio si radica sull'ipotesi di esistenza di un mercato dei capitali ideale in equilibrio; tuttavia la realtà dei mercati tende talvolta a non rispecchiare le caratteristiche del mercato ideale e, di conseguenza, si aprono delle opportunità di arbitraggio, conseguibili con apposite strategie di acquisto e vendita degli strumenti finanziari negoziati.

1.3 Il principio di equivalenza finanziaria e la funzione valore

1.3.1 L'equivalenza finanziaria, la capitalizzazione e l'attualizzazione

Nei precedenti paragrafi abbiamo introdotto le operazioni finanziarie, illustrandone definizioni e tipologie. Nel presente paragrafo ci occuperemo di de-

finire e formalizzare l'equivalenza finanziaria tra gli importi monetari seppur esigibili in epoche diverse.
Consideriamo l'operazione finanziaria elementare dell'esempio 1.2.1:

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{30; 100\} \,/\, \{0; 1\}\,.$$

Per quanto detto nel paragrafo 1.1, è possibile stabilire una relazione di equivalenza tra i 100 euro esigibili al tempo $t_n = 1$ e i 30 euro esigibili al tempo $t_0 = 0$: la differenza tra i due importi, pari a 70 euro, quantifica il valore temporale del denaro, ovvero la variazione dei 30 euro di capitale nel passare dal tempo 0 al tempo 1. La lettura può avvenire anche procedendo temporalmente a ritroso: i 100 euro subiscono una variazione di capitale pari a -70 nel passare dal tempo 1 al tempo 0.
Dunque, misurando il valore temporale del denaro è possibile confrontare i due importi disponibili in due epoche diverse. Confrontare tali importi significa dire che, presa una certa epoca di confronto, essi sono equivalenti.
Il fondamento del ragionamento esposto poc'anzi deriva dal seguente principio.

Definizione 1.3.1 (Principio di equivalenza finanziaria). *È finanziariamente equivalente ricevere, o corrispondere, un importo immediatamente oppure riceverlo, o corrisponderlo, in un'epoca successiva purché, in questa seconda eventualità, all'importo si aggiunga un interesse per il differimento della transazione.*

Da un punto di vista analitico, il principio esposto può essere tradotto nei seguenti termini.
Si consideri l'operazione finanziaria elementare:

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{C; M\} \,/\, \{t_0; t_n\}$$

dove si è posto $x_0 = C$ e $x_n = M$ rispetto alla formulazione (1.2).
Lo scambio di importi monetari sottostante questa operazione finanziaria può essere temporalmente letto da due prospettive: noto l'importo C, disponibile all'epoca t_0, esso è scambiato con l'importo non noto M esigibile all'epoca t_n; viceversa, noto l'importo M disponibile all'epoca t_n, esso è scambiato con l'importo non noto esigibile all'epoca t_0. Si tratta di una vera e propria "elasticità di movimento" sullo scadenzario temporale, cioè abbiamo la possibilità di stabilire importi finanziariamente equivalenti, qualunque sia l'epoca di riferimento:

$$(C, t_0) \Longleftrightarrow (M, t_n).$$

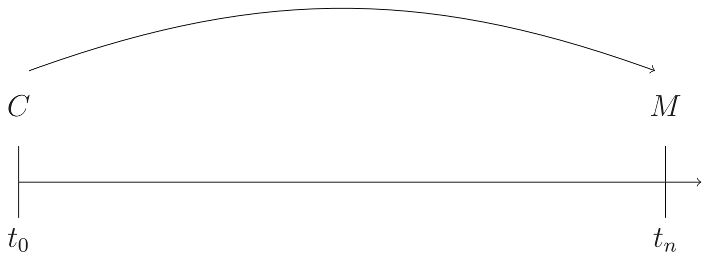
Dunque, noto uno dei due importi, grazie al principio di equivalenza finanziaria siamo in grado di determinare l'altro. In particolare:

- Noto l'importo C, per determinare l'importo M occorre definire la variazione che il capitale C subisce nel passare dall'epoca t_0 all'epoca t_n. Chiamiamo tale variazione **interesse**, indicandolo con il simbolo I, ed è tale per cui:

$$M = C + I. \tag{1.3}$$

  Un'operazione finanziaria di questo tipo è detta **operazione di capitalizzazione**, o semplicemente capitalizzazione. L'importo C è detto capitale iniziale impiegato all'epoca t_0 e il corrispondente equivalente finanziario sarà l'importo M, detto **montante finanziario**, esigibile all'epoca t_n.

  L'operazione di capitalizzazione è, da un punto di vista temporale, caratterizzata da un movimento "in avanti":



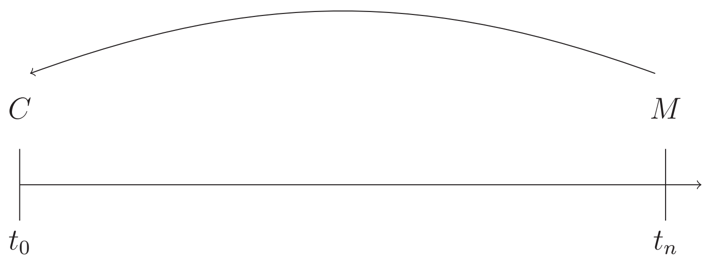
  Nelle operazioni di capitalizzazione è facile osservare che $M \geq C$ per ogni $t_n \geq t_0$, ovvero se $t_n > t_0$ significa che, essendo trascorso del tempo, il valore temporale del denaro è positivo, cioè $I > 0$, e per la (1.3) si ottiene che $M > C$; se invece $t_n = t_0$, significa che i due importi sono scambiati nel medesimo istante temporale e, di conseguenza, $I = 0$ e $M = C$. Questi ovvi risultati sono diretti discendenti del principio di equivalenza finanziaria: se non c'è alcun differimento temporale, nessuna variazione di capitale può intervenire, così che i due capitali sono direttamente confrontabili; viceversa, allo scorrere del tempo gli importi subiscono delle variazioni di valore affinché siano confrontabili e diventino quindi finanziariamente equivalenti.

- Noto l'importo M, per determinare l'importo C occorre definire la variazione che il capitale M subisce nel passare dall'epoca t_n all'epoca t_0. Chiamiamo tale variazione **sconto**, indicandolo con il simbolo D, ed è tale per cui:

$$C = M - D. \tag{1.4}$$

Un'operazione finanziaria di questo tipo è detta **operazione di attualizzazione o di anticipazione o di sconto**, o semplicemente attualizzazione. L'importo M è l'importo da scontare disponibile all'epoca t_n e il corrispondente equivalente finanziario sarà l'importo C, detto **valore attuale o valore scontato o anticipato**, esigibile all'epoca t_0.

L'operazione di attualizzazione è, da un punto di vista temporale, caratterizzata da un movimento "a ritroso":



Così come per le operazioni di capitalizzazione, anche in quelle di attualizzazione, per il principio di equivalenza finanziaria varrà che $M \geq C$ per ogni $t_n \geq t_0$.

Esempio 1.3.1 (Operazione di capitalizzazione)**.** *Tizio versa su un conto corrente bancario una somma di* 100 *euro e, se il conto corrente non viene movimentato per* 1 *anno, la banca riconoscerà* 105 *euro. L'operazione finanziaria è del tipo:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{100; 105\} \,/\, \{0; 1\}$$

ovvero, impiegando 100 *euro di capitale all'epoca* $t_0 = 0$ *si otterrà un montante di* 105 *all'epoca* $t_n = 1$*. L'interesse maturato su un anno:*

$$I = M - C = 105 - 100 = 5$$

misura la variazione di valore dei 100 *euro iniziali. Dunque, è possibile affermare che i* 100 *euro disponibili all'epoca* 0 *valgono* 105 *euro tra un anno.*

Esempio 1.3.2 (Operazione di attualizzazione)**.** *Tizio cede a Caio all'epoca* $t_0 = 0$ *un credito che scadrà tra due anni, cioè in* $t_n = 2$*, fruttando un importo di* 200 *euro. Caio pagherà a Tizio, all'epoca* 0*, l'equivalente finanziario dei* 200 *euro di credito a scadenza, convenuto in ammontare pari a* 50 *euro. Dal punto di vista di Caio l'operazione finanziaria è del tipo:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{50; 200\} \,/\, \{0; 2\}\,.$$

Per il differimento temporale, lo sconto che misura il valore temporale del denaro sarà:

$$D = M - C = 200 - 50 = 150$$

ovvero possiamo dire che il credito il cui valore è di 200 *euro tra* 2 *anni equivale ad un valore di* 50 *euro all'epoca* 0*. La variazione di valore definita dallo sconto, pari a* 150*, rappresenta la misura del valore temporale del denaro.*

Osservazione 1.3.1. *Si noti che nella trattazione fatta finora non è stata considerata alcuna differenziazione tra le diverse tipologie di operazione finanziarie. La ragione è che il nostro primario obiettivo è quello di stabilire e comprendere la logica dell'equivalenza finanziaria e, una volta applicata correttamente, nulla cambierebbe se considerassimo un tipo di operazione finanziaria piuttosto che un'altra. Un'analisi finanziaria corretta richiede per certo la giusta identificazione e rappresentazione del tipo di operazione, ma, ulteriormente, l'esatto computo degli importi finanziariamente equivalenti che costituiscono l'operazione stessa. Ciò marca l'importanza dei concetti di capitalizzazione e di attualizzazione nella modellizzazione matematico-finanziaria.*

Osservazione 1.3.2. *Dalle equazioni (1.3) e (1.4) è facile verificare che* $I = D$*. Infatti, se i due importi* C *ed* M *sono finanziariamente equivalenti, allora la misura del valore temporale del denaro, sia che capitalizzando che attualizzando, deve essere la stessa, purché non vari il differimento tra le date di esigibilità dei due importi.*

1.3.2 Funzione valore, fattore di capitalizzazione e di attualizzazione

Procediamo ora con l'esplicitare le relazioni alla base della valutazione di una qualsivoglia operazione finanziaria. Le equazioni (1.3) e (1.4) sono delle più che naturali derivazioni della lettura del principio di equivalenza finanziaria. Con maggior rigore, al fine di stabilire una base matematica di riferimento per una qualsivoglia valutazione inerente le operazioni finanziarie, introduciamo la c.d. *funzione valore*. La funzione valore è lo strumento che ci permette di determinare gli importi finanziariamente equivalenti a partire dalla conoscenza di tre elementi, quali: l'importo, l'epoca iniziale e l'epoca finale.
Formalmente, la **funzione valore**, detta anche **legge di capitalizzazione** o **funzione montante**, è ogni funzione continua $f : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ tale che nota la terna di valori (C, t_0, t_n), permette di

determinare l'importo M, esigibile all'epoca t_n, finanziariamente equivalente all'importo C disponibile in t_0, ossia:

$$M = f(C, t_0, t_n). \tag{1.5}$$

la funzione valore definisce la legge per mezzo della quale si forma, ed è possibile misurare, il montante ed ha le seguenti proprietà:

1. la funzione valore è una funzione *non negativa*, ovvero $f(C, t_0, t_n) \geq 0$ per ogni $t_0, t_n \geq 0$ e per ogni capitale iniziale $C \geq 0$;

2. per ogni $t_0 \leq t_n$ e per ogni capitale $C, S \geq 0$ risulta che

   $$f(C + S, t_0, t_n) = f(C, t_0, t_n) + f(S, t_0, t_n);$$

   Questa è la proprietà di linearità della funzione valore rispetto all'importo investito, ovvero il capitale investito può essere frazionato senza alterare il risultato della capitalizzazione, purché ci si riferisca al medesimo intervallo temporale;

3. la funzione valore è, inoltre, una funzione monotona. In particolare, assumendo che essa sia differenziabile si ha che:

   (a) la funzione valore è monotona crescente rispetto al capitale impiegato C, ovvero $\frac{\partial f}{\partial C} > 0$: al crescere del capitale iniziale in t_0 crescerà il montante esigibile all'epoca t_n. Pertanto, presi due capitali C_1 e C_2 entrambi esigibili in t_0, tali che $C_2 > C_1$, risulterà:

   $$f(C_2, t_0, t_n) > f(C_1, t_0, t_n);$$

   (b) la funzione valore è monotona crescente rispetto all'epoca di scadenza t_n, ovvero $\frac{\partial f}{\partial t_n} > 0$. Ciò comporta che maggiore è la durata dell'operazione finanziaria, tanto maggiore sarà il montante finale. Formalmente, posto $t_0 \leq t_n < t_k$, impiegando un medesimo capitale $C > 0$ in t_0, si ha che:

   $$f(C, t_0, t_k) > f(C, t_0, t_n);$$

   (c) la funzione valore è monotona decrescente rispetto alla data iniziale t_0, ovvero $\frac{\partial f}{\partial t_0} < 0$. Infatti, contrariamente a quanto visto nel punto (b), riducendo la durata dell'operazione decresce il tempo di capitalizzazione, ottenendo un montante inferiore. Per cui, posto $t_0 < t'_0 \leq t_n$, impiegando un medesimo capitale $C > 0$, si ha che:

   $$f(C, t_0, t_n) > f(C, t'_0, t_n);$$