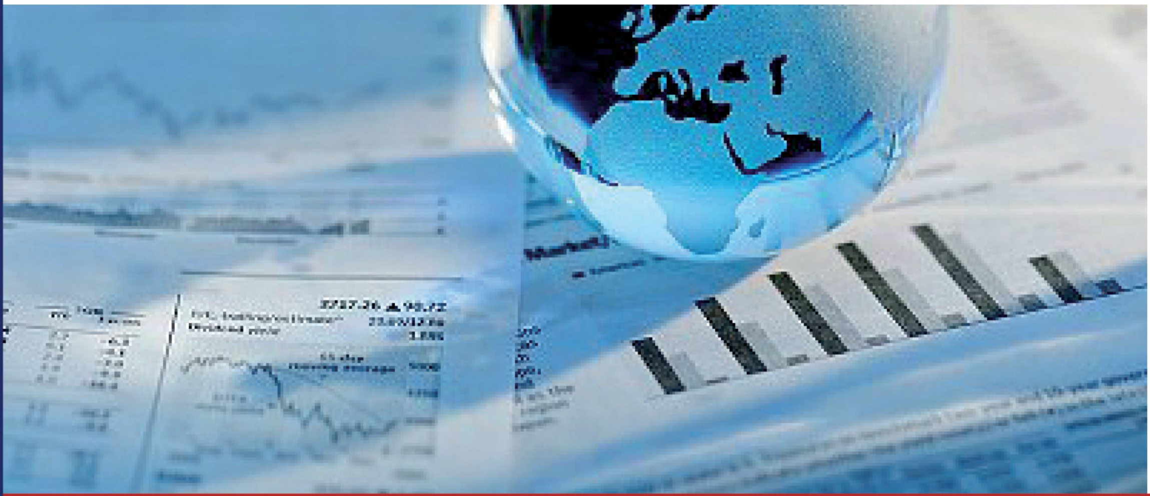
Rosella Giacometti - Cristian Epis

Esercizi di matematica finanziaria



SECONDA EDIZIONE

Giappichelli

Prefazione

"Labor omnia vincit improbus"[1]. *È a questa frase di Virgilio, contenuta nelle Georgiche, che auspichiamo possano ispirarsi gli studenti nell'utilizzo di questo eserciziario, naturale conclusione di un percorso iniziato con la stesura del testo "Appunti di matematica finanziaria".*

In modo forse ancora più marcato di quanto già non accada negli altri corsi economico-finanziari, i concetti della matematica finanziaria richiedono infatti lo svolgimento del maggior numero possibile di esercizi perché ampia è la casistica che si può incontrare.

Siamo peraltro convinti che, così facendo, gli studenti possano beneficiare di almeno due vantaggi, senza considerare quello meno nobile ma che probabilmente è a loro più caro, ovvero il superamento dell'esame.

Il primo consiste nella capacità di queste esercitazioni di favorire l'assimilazione e consolidamento di alcuni concetti che, dal punto di vista teorico, possono talvolta apparire di non immediata comprensione.

Il secondo vantaggio è quello di permettere allo studente, una volta in più, di rendersi conto di come quanto studiato abbia evidenti e continue implicazioni nella vita di ogni giorno. Indipendentemente da ciò che il futuro riserverà (professionalmente parlando), è infatti pressoché certo che ognuno di essi sia destinato ad imbattersi prima o poi in operazioni quali l'accensione di un mutuo, l'acquisto di un bene con pagamento rateale del prezzo, la stipula di un contratto di investimento, la sottoscrizione di un contratto assicurativo … operazioni che, anche con questo eserciziario, ci auguriamo possano essere affrontate con la dovuta preparazione.

Dal punto di vista dei contenuti, il libro replica quanto presentato in "Appunti di matematica finanziaria". I primi tre capitoli (Nozioni Elementari, Regimi Finanziari, Tassi equivalenti e tassi medi) sono quindi dedicati ad esercizi legati a concetti base della matematica finanziaria. I capitoli 4 (Valore

[1] Che possiamo tradurre con "L'impegno costante supera ogni cosa" o "Ogni difficoltà è vinta dall'impegno/fatica costante".

di un'operazione finanziaria), 5 (Le Rendite), 6 (Ammortamenti) e 7 (Criteri di scelta tra operazioni finanziarie) trattano quesiti inerenti alle operazioni finanziarie complesse. Il capitolo 8 (Matematica attuariale) contiene, infine, esercizi ed approfondimenti sulle assicurazioni.

La struttura di ciascun capitolo è la medesima e si articola in tre sezioni. La prima consiste in una "scheda di ripasso" contenente le formule utili per lo svolgimento degli esercizi successivamente presentati. La seconda parte comprende una serie di esercizi esemplificativi di cui si riporta, passo dopo passo, lo svolgimento. La terza sezione, infine, include esercizi la cui risoluzione viene lasciata allo studente che, in questo modo, può verificare il proprio grado di apprendimento.

GLI AUTORI

1 Nozioni Elementari

Una funzione $m(t)$ è un fattore di montante se valgono le seguenti condizioni:

1. $m(t)$ definita in $[0\ T]$;
2. $m(0) = 1$;
3. $m(t)$ monotona non decrescente; se derivabile quindi $m'(t) \geq 0$;

Ad ogni fattore di montante è associato un fattore di attualizzazione coniugato $v(t) = 1/m(t)$. Ne consegue che la funzione $v(t)$ è fattore di attualizzazione se valgono:

1. $v(t)$ definita e positiva in $[0\ T]$;
2. $v(0) = 1$;
3. $v(t)$ monotona non crescente; se derivabile quindi $v'(t) \leq 0$.

Sia $M(t) = Cm(t)$ la funzione che rappresenta il montante prodotto in t da un investimento di una somma C in $t_0 = 0$.

Consideriamo il montante prodotto tra t_1 e t_2 con $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ e definiamo fattore di capitalizzazione (o montante):

$$\mu(t_1; t_2) = \frac{M(t_2)}{M(t_1)};$$

dove $\mu(0; t_2) = m(t_2)$.

Fattore di attualizzazione (o sconto):

$$\nu(t_1; t_2) = \frac{M(t_1)}{M(t_2)};$$

dove $\nu(0; t_2) = \nu(t_2)$.

Interesse o sconto $I(t_1,t_2) = D(t_1,t_2) = M(t_2) - M(t_1)$

Tasso di interesse $i(t_1, t_2) = \dfrac{M(t_2) - M(t_1)}{M(t_1)}$

Intensità di interesse $\gamma(t_1, t_2) = \dfrac{M(t_2) - M(t_1)}{(t_2 - t_1) \cdot M(t_1)}$;

Tasso di sconto $d(t_1, t_2) = \dfrac{M(t_2) - M(t_1)}{M(t_2)}$;

Intensità di sconto $\eta(t_1, t_2) = \dfrac{M(t_2) - M(t_1)}{(t_2 - t_1) \cdot M(t_2)}$

Se $t_1 = 0$ l'utilizzo di funzioni a due variabili non è necessario in quanto la prima variabile è sempre pari a zero e la seconda rappresenta la durata dell'operazione.

Operazioni di capitalizzazione

Montante $M(t) = Cm(t)$

Interesse $I(t) = M(t) - C$

Tasso di interesse $i(t) = \dfrac{M(t) - C}{C} = \dfrac{I(t)}{C}$

Fattore di capitalizzazione (o di montante) $m(t) = \dfrac{M(t)}{C}$

Intensità istantanea di interesse $\delta(t) = \dfrac{m'(t)}{m(t)}$

Operazioni di attualizzazione

Valore attuale $V(t) = K - D(t)$

Sconto $D(t) = K - V(t)$

Tasso di sconto $d(t) = \dfrac{K - V(t)}{K} = \dfrac{D(t)}{K}$

Fattore di attualizzazione (o di sconto) $v(t) = \dfrac{V(t)}{K}$

Intensità istantanea di sconto $\delta(t) = \dfrac{m'(t)}{m(t)}$

ESERCIZI RISOLTI

Esercizio 1

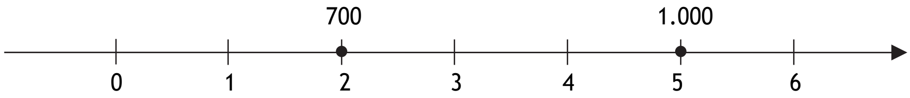
Date le seguenti situazioni finanziarie elementari (con i tempi espressi in anni e gli importi espressi in euro):

(2; 700)

(5; 1.000)

legate da un'equivalenza intertemporale, calcolare l'interesse, il tasso di interesse, il fattore di capitalizzazione e l'intensità di interesse.

Rappresentiamo graficamente le due SFE



Otteniamo:

$$I(2,5) = M(5) - M(2) = 1.000 - 700 = 300$$

$$i(2,5) = \frac{M(5) - M(2)}{M(2)} = \frac{300}{700} = 42,86\%$$

$$\mu(2,5) = \frac{M(5)}{M(2)} = \frac{1.000}{700} = 1,4286;$$

$$\gamma(2,5) = \frac{i(2,5)}{5-2} = \frac{0,4286}{3} = 0,1429.$$

Esercizio 2

Con riferimento alle situazioni finanziarie elementari dell'esercizio precedente calcolare lo sconto, il tasso di sconto, il fattore di attualizzazione e l'intensità di sconto.

$$D(2,5) = M(5) - M(2) = 1.000 - 700 = 300;$$

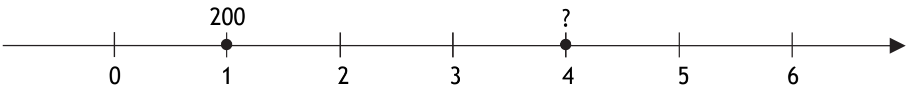
$$d(2,5) = \frac{M(5) - M(2)}{M(5)} = \frac{D(2,5)}{M(5)} = \frac{300}{1.000} = 30,00\%;$$

$$\nu(2,5) = \frac{M(2)}{M(5)} = \frac{700}{1.000} = 0,70;$$

$$\eta(2,5) = \frac{d(2,5)}{5-2} = \frac{0,3}{3} = 0,1.$$

🕮 Esercizio 3

Considerata la situazione finanziaria elementare (1; 200), stabilire quale situazione finanziaria elementare legata da un'equivalenza intertemporale permette di conseguire, su un orizzonte temporale di tre anni, un tasso d'interesse del 12%. Calcolare poi l'interesse e l'intensità d'interesse.



Il tasso di interesse dell'operazione è dato da

$$i(1,4) = \frac{M(4) - M(1)}{M(1)} = \frac{I(1,4)}{M(1)}.$$

Imponendo che sia pari al 12%, otteniamo

$$\frac{M(4) - 200}{200} = 0{,}12$$

da cui M(4) = 224. La SFE ricercata è quindi (4; 224).

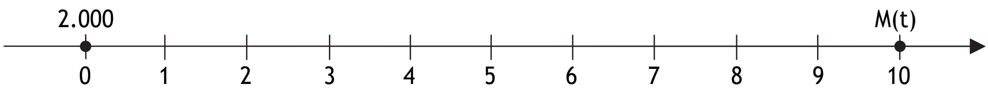
L'interesse e l'intensità di interesse sono invece uguali a:

$$I(1,4) = M(4) - M(1) = 224 - 200 = 24;$$

$$\gamma(1,4) = \frac{i(1,4)}{4 - 1} = \frac{0{,}12}{3} = 0{,}04.$$

🕮 Esercizio 4

Dato il fattore di capitalizzazione $m(t) = 1 + 0{,}04\ t$ con $t \geq 0$ e supposti C = 2.000,00 euro e t = 10 anni, determinare il montante, l'interesse, il tasso di interesse, l'intensità di interesse e l'intensità istantanea di interesse.



Partendo da

$$M(t) = C \cdot m(t)$$

il montante finanziariamente equivalente in t=10 al capitale iniziale di 2.000 è

$$M(10) = 2.000 \cdot (1 + 0{,}04 \cdot 10) = 2.800.$$

Conoscendo la seconda SFE (10; 2.800) otteniamo:

$$I(0,10) = I(10) = M(10) - C = 2.800 - 2.000 = 800;$$

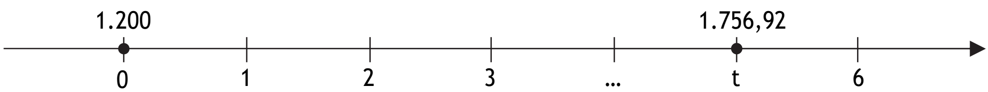
$$i(0,10) = i(10) = \frac{I(10)}{C} = \frac{800}{2.000} = 40,00\%;$$

$$\gamma(0,10) = \gamma(10) = \frac{i(10)}{t} = \frac{0,40}{10} = 0,04;$$

$$\delta(10) = \frac{m'(10)}{m(10)} = \frac{0,04}{1 + 0,04 \cdot 10} = 0,0286.$$

🕮 Esercizio 5

Dato il fattore di attualizzazione $v(t) = (1,1)^{-t}$ con $t \geq 0$, calcolare di quanto tempo deve essere scontata una cambiale del valore nominale di € 1.756,92 perché il suo valore attuale sia di € 1.200,00. Determinare quindi lo sconto, il tasso di sconto, l'intensità di sconto e l'intensità istantanea di sconto.



Ricordando che $V(t) = K \cdot v(t)$ possiamo scrivere

$$1.200,00 = 1.756,92 \cdot (1,1)^{-t}$$

da cui

$$(1,1)^t = \frac{1.756,92}{1.200,00} \rightarrow \ln(1,1)^t = \ln\left(\frac{1.756,92}{1.200,00}\right) \rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1.756,92}{1.200,00}\right)}{\ln(1,1)} = 4.$$

Partendo dalle due situazioni finanziarie elementari così ricavate (0; 1.200) e (4; 1.756,92), siamo a questo punto in grado di determinare tutte le altre grandezze richieste dall'esercizio:

$$D(4) = K - V(4) = 1.756,92 - 1.200,00 = 556,92;$$

$$d(4) = \frac{D(4)}{K} = \frac{556,92}{1.756,92} = 0,3170;$$

$$\eta(4) = \frac{d(4)}{4} = \frac{0,3170}{4} = 0,07925;$$

$$m(t) = \frac{1}{v(t)} \rightarrow \delta(4) = \frac{m'(4)}{m(4)} = \frac{\ln(1,1) \cdot (1,1)^4}{(1,1)^4} = 0,095.$$

🕮 Esercizio 6

Stabilire se la funzione $m(t) = 3t^5 + 4t + 1$ *rappresenta una legge finanziaria di capitalizzazione.*

Affinché la funzione m(t) sia una L.F.C., devono essere soddisfatte tre condizioni:

1. m(t) deve essere definita per ogni $t \in [0, T)$.
   VERO: essendo R il dominio della funzione in questione, sicuramente essa è definita in [0, T);
2. m(0) = 1.
   VERO: procedendo per sostituzione
   $m(0) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 = 1$;
3. m(t) monotona non decrescente.
   VERO: poiché la funzione è derivabile è sufficiente verificare che $m'(t) \geq 0$ quindi:
   $m'(t) = 15t^4 + 4 \geq 0$.

Risultando verificate tutte e tre le condizioni, è possibile affermare che la funzione di partenza è una legge finanziaria di capitalizzazione.

🕮 Esercizio 7

Stabilire per quali valori del parametro reale a, la funzione $m(t) = \frac{3}{a + 2^t}$ *rappresenta una legge finanziaria di capitalizzazione.*

Affinché la funzione m(t) sia una L.F.C., devono essere soddisfatte tre condizioni:

1. m(t) definita per ogni $t \in [0, T)$.
   Posto $a \neq -2^t$, la funzione è sicuramente definita in [0, T);
2. m(0) = 1.
   Procedendo per sostituzione si ottiene
   $m(0) = \frac{3}{a + 2^0} = 1$ da cui si ricava che a = 2.
   La seconda condizione è quindi verificata per a = 2, il che ci permette di riscrivere la funzione di partenza
   $m(t) = \frac{3}{2 + 2^t} = 1$.
   Per $t \geq 0$, $2 \neq -2^t$.
3. m(t) monotona non decrescente.
   Poiché la funzione è derivabile, è sufficiente verificare che $m'(t) \geq 0$, quindi,

$$m'(t) = -\frac{3 \cdot 2^t \log 2}{(2 + 2^t)^2} \geq 0 \text{ da cui } \frac{3 \cdot 2^t \log 2}{(2 + 2^t)^2} \leq 0.$$

Essendo il numeratore ed il denominatore strettamente positivi per ogni valore di t, la disequazione non è mai verificata.

Possiamo concludere che la funzione di partenza non è una legge finanziaria di capitalizzazione.

🕮 Esercizio 8

Stabilire per quali valori dei parametri reali a e b, la funzione $m(t) = -2a\sqrt{t} + be^{2t} + 1$ *rappresenta una legge finanziaria di capitalizzazione, per t* $\in$ *[0; +∞].*

Affinché la funzione m(t) sia una L.F.C., devono essere soddisfatte tre condizioni:

1. m(t) definita per ogni t $\in$ [0, T).
   VERO: essendo il dominio della funzione in questione [0, + ∞), essa è definita in [0, T);
2. m(0) = 1.
   procedendo per sostituzione
   $$m(0) = -2a\sqrt{0} + be^{2\cdot 0} + 1 = 1$$
   da cui si ricava che b = 0.
   La funzione di partenza può essere allora riscritta nel seguente modo
   $$m(t) = -2a\sqrt{t} + 1;$$
3. m(t) monotona non decrescente.
   La funzione è derivabile quindi, per verificare questa condizione, è sufficiente porre $m'(t) \geq 0$, cioè
   $$m'(t) = -\frac{2a}{2\sqrt{t}} \geq 0$$
   che risulta non negativa quando $a \leq 0$.

In conclusione, m(t) è legge finanziaria di capitalizzazione se e solo se $a \leq 0$ e b = 0.

🕮 Esercizio 9

Stabilire se la funzione $v(t) = \frac{1}{(1+3t)^4}$ *rappresenta una legge finanziaria di attualizzazione.*

Affinché la funzione v(t) sia una legge finanziaria di attualizzazione, devono essere soddisfatte tre condizioni:

1. v(t) definita e positiva per ogni t $\in$ [0, T).
   VERO: il dominio della funzione è $R - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ quindi essa è definita in [0, T); essendo sia il numeratore che il denominatore ivi sempre positivi per $t \geq 0$, si può affermare che v(t) è anche positiva.

2. $v(0) = 1$.
   VERO: procedendo per sostituzione si ottiene
$$v(0) = \frac{1}{(1+3\cdot 0)^4} = 1;$$
3. $m(t)$ monotona non crescente.
   VERO: dal momento che la funzione è derivabile è sufficiente verificare che $v'(t) \leq 0$ quindi
$$v'(t) = -\frac{12}{(1+3t)^5} \leq 0.$$

Risultando verificate tutte e tre le condizioni è possibile affermare che la funzione di partenza è una legge finanziaria di attualizzazione.

🕮 Esercizio 10

Date le funzioni:
$$m_1(t) = \frac{1+8t}{1+t}$$
$$m_2(t) = 1+4t$$
dopo aver verificato che si tratta di leggi finanziarie di capitalizzazione, stabilire dopo quanto tempo uno stesso capitale investito in t = 0 permette di conseguire con le due leggi il medesimo montante.

L'esercizio richiede innanzitutto di verificare se $m_1(t)$ e $m_2(t)$ sono L.F.C., quindi:

$m_1(t)$

1. $m_1(t)$ definita per ogni $t \in [0, T)$.
   VERO: essendo il dominio della funzione $R - \{-1\}$, sicuramente essa è definita in $[0, T)$;
2. $m_1(0) = 1$.
   VERO: procedendo per sostituzione si ottiene
   $$m_1(0) = \frac{1+8\cdot 0}{1+0} = 1;$$
3. $m_1(t)$ monotona non decrescente.
   VERO: dal momento che la funzione è derivabile è sufficiente verificare che $m_1'(t) \geq 0$ quindi
   $$m_1'(t) = \frac{8\cdot(1+t) - 1\cdot(1+8t)}{(1+t)^2} = \frac{7}{(1+t)^2} \geq 0.$$

Risultando verificate tutte e tre le condizioni è possibile affermare che la funzione $m_1(t)$ è una legge finanziaria di capitalizzazione.

$m_2(t)$

1. $m_2(t)$ definita per ogni $t \in [0, T)$.
   VERO: essendo R il dominio della funzione, essa è sicuramente definita in $[0, T)$;

2. $m_2(0) = 1$.
   VERO: procedendo per sostituzione si ottiene
   $m_2(0) = 1 + 4 \cdot 0 = 1$;
3. $m_2(t)$ monotona non decrescente.
   VERO: dal momento che la funzione è derivabile è sufficiente verificare che $m_2'(t) \geq 0$ quindi, svolgendo i calcoli
   $m_2'(t) = 0 + 4 \geq 0$.

Risultando verificate tutte e tre le condizioni è possibile affermare che la anche funzione $m_2(t)$ è una legge finanziaria di capitalizzazione.

A questo punto, per stabilire se e dopo quanto un capitale investito in $t = 0$ con le due L.F.C. permette di ottenere lo stesso montante si dovrà impostare la seguente equazione:

$$m_1(T) = m_2(T)$$

$$\frac{1+8t}{1+t} = 1 + 4t$$

da cui si ricava che:

$t = 0$ (diretta conseguenza del fatto che entrambe le funzioni sono leggi finanziarie di capitalizzazione) e

$t = 0{,}75$.

Esercizio 11

Data la legge finanziaria di attualizzazione:

$$v(t) = \frac{1}{1+0{,}2t}$$

stabilire per quanto tempo un capitale deve essere scontato affinché si riduca del 20%.

Sapendo che $V = K \cdot v(t)$, per risolvere l'esercizio è quindi sufficiente individuare il tempo t tale per cui risulta soddisfatta la seguente equazione

$$\frac{8}{10}K = K\frac{1}{1+0{,}2t}$$

da cui si ottiene che $t = 1{,}25$.

ESERCIZI DA RISOLVERE

🕮 Esercizio 12

Date le seguenti situazioni finanziarie elementari (con i tempi espressi in anni e gli importi espressi in euro) legate da un'equivalenza intertemporale:

(1; 270)

(6; 350)

calcolare interesse, tasso di interesse, fattore di capitalizzazione, intensità di interesse.

[Soluzione: $I(1,6)$ = € 80,00; $i(1,6)$ = 29,63%; $\mu(1,6) = 1{,}2963$; $\gamma(1,6) = 0{,}0593$]

🕮 Esercizio 13

Date le seguenti situazioni finanziarie elementari (con i tempi espressi in anni e gli importi espressi in euro) legate da un'equivalenza intertemporale:

(15; 985)

(16,5; 1.020)

calcolare sconto, tasso di sconto, fattore di attualizzazione, intensità di sconto.

[Soluzione: $D(15;16{,}5)$ = € 35,00; $d(15;16{,}5)$ = 3,43%; $v(15;16{,}5) = 0{,}9657$; $\eta(15;16{,}5) = 0{,}0229$]

🕮 Esercizio 14

Data la situazione finanziaria elementare (con i tempi espressi in anni e gli importi espressi in euro)

(4; 500)

stabilire l'importo disponibile in $t = 7$ che permette di conseguire un tasso di interesse del 15%. Calcolare poi interesse e intensità di interesse.

[Soluzione: $M(7)$ = € 575,00; $I(4,7)$ = € 75,00; $\gamma(4,7) = 0{,}05$]

🕮 Esercizio 15

Date le seguenti situazioni finanziarie elementari (con i tempi espressi in anni e gli importi espressi in euro) legate da un'equivalenza intertemporale:

(0; x)

(8; 400)

calcolare l'importo x che garantisce un'intensità di sconto pari a 0,02.

[Soluzione: X = € 336,00]

Esercizio 16

Dato il fattore di montante

$$m(t) = 1 + 0{,}03\ t$$

determinare montante, interesse, tasso di interesse, intensità di interesse e intensità istantanea di interesse di un capitale di € 1.400,00 investito per cinque anni.

[Soluzione: M(5) = € 1.610,00; I(5) = € 210,00; i(5) = 15,00%; $\gamma(5) = 0{,}03$; $\delta(5) = 0{,}0261$]

Esercizio 17

Dato il fattore di sconto

$$v(t) = 1 - 0{,}05t$$

stabilire di quanto tempo una cambiale del valore nominale di € 5.700,00 deve essere scontata per produrre uno sconto di € 480,00.

[Soluzione: t = 1,6842]

Esercizio 18

Stabilire se la funzione

$$m(t) = \log(1+t) + \frac{4}{3}t^3 + e^t$$

è una legge finanziaria di capitalizzazione.

[Soluzione: m(t) è legge finanziaria di capitalizzazione]

Esercizio 19

Determinare per quali valori dei parametri reali a e b la funzione

$$m(t) = \log(2+t) + at + 2b - \log 2$$

è una legge finanziaria di capitalizzazione.

[Soluzione: $a \geq -\frac{1}{2+t}; b = \frac{1}{2}$]