Monica Bianchi - Grazia Messineo

Appunti di matematica per l'analisi economica

SISTEMI DINAMICI

Giappichelli

Prefazione

Questa opera è una rielaborazione di una dispensa del corso di Matematica per le Applicazioni Economiche e Finanziarie tenuto dagli autori presso l'Università Cattolica del Sacro Cuore di Milano. È rivolto a studenti di corsi di laurea triennale e magistrale in Economia interessati ad approfondire alcuni strumenti matematici utili nella trattazione di problemi economici e finanziari.
La presentazione degli argomenti è principalmente di carattere teorico, anche se si è preferito non soffermarsi sulle dimostrazioni degli enunciati, ma accompagnare i singoli argomenti con numerosi esempi ed esercizi che comprendono anche alcune tipiche applicazioni alla microeconomia e alla macroeconomia.
L'opera è strutturata in due volumi. Nel primo sono trattati alcuni elementi di algebra lineare utili per lo sviluppo delle parti successive e l'ottimizzazione statica, sia libera che vincolata; nel secondo volume viene esposta la teoria dei sistemi dinamici, sia nel caso continuo che nel caso discreto. I volumi sono entrambi accompagnati da una ampia raccolta di esercizi. Infine completano i volumi alcune appendici che richiamano argomenti propedeutici al materiale presentato.
Alcuni esercizi raccolti nel capitolo 3 sono ispirati o tratti da temi d'esame di vari insegnamenti dell'Università Cattolica del Sacro Cuore di Milano e dell'Università degli Studi di Milano - Bicocca o da dispense scritte per gli studenti delle stesse Università (Foresti e Vassallo (2000), Vassallo (2006), Vassallo (2007), Bianchi e Pini (2008), Bianchi e Torriero (2001)).
Ringraziamo tutti gli autori che ci hanno messo a disposizione il loro materiale: la prof. Paola Foresti, il prof. Nicolò Pecora, la prof. Rita Pini, la prof. Anna Torriero.
Un ringraziamento particolare va al prof. Salvatore Vassallo e alla prof. Carla Peri, per il materiale messo a disposizione, per aver letto il manoscritto e per gli utili suggerimenti: il loro contributo ci ha permesso di migliorare sensibilmente la presentazione degli argomenti.
Non escludiamo, in ogni caso, la presenza di refusi o omissioni, di cui siamo interamente responsabili. Si ringrazia fin d'ora chi volesse evidenziarli.

Parte I

Modelli dinamici

CAPITOLO 1

Modelli dinamici continui e discreti

1.1 Classificazione dei sistemi dinamici

Il termine *dinamico* si riferisce a fenomeni che variano nel corso del tempo. La costruzione di un modello matematico in grado di descrivere rigorosamente l'evoluzione di un fenomeno può risultare molto complessa, sopratutto se il fenomeno non presenta un andamento regolare. Nella costruzione del modello matematico si tengono allora in considerazione le caratteristiche principali del sistema oggetto d'analisi tralasciando quelle meno importanti: il modello risultante sarà tanto più affidabile e preciso quanto più l'evoluzione prevista non si discosterà da quella reale.
Per costruire il modello matematico bisogna prima di tutto identificare alcune grandezze misurabili in modo oggettivo che permettono di descrivere in ogni istante la configurazione del sistema che si sta analizzando. Tali variabili verranno dette *variabili di stato*.
Successivamente bisogna assegnare una *legge di evoluzione*, che lega il valore delle variabili di stato nel generico istante temporale t con il loro tasso di crescita, e alcune *condizioni iniziali* che forniscono informazioni sulle variabili di stato in corrispondenza all'istante iniziale t_0.
Con il termine *sistema dinamico* si intende dunque un procedimento matematico che permette di descrivere come le variabili di stato si modificano nel corso del tempo partendo da condizioni iniziali note e seguendo una assegnata legge di evoluzione.
In questo paragrafo classificheremo i sistemi dinamici limitando l'analisi a sistemi descritti da modelli deterministici, ossia modelli in cui non sono presenti elementi aleatori.

Una prima importante distinzione si basa sull'insieme di definizione delle variabili di stato ossia sull'insieme in cui varia la variabile indipendente tempo. In alcuni fenomeni le variabili di stato possono essere rilevate solo in determinati istanti temporali spesso equidistanti tra loro (si pensi ad esempio alla rata di un mutuo) mentre in altri le variabili di stato variano con continuità nel tempo (si pensi ad esempio alla variazione della temperatura nell'arco di una giornata). Pensando di assumere $t_0 = 0$, possiamo dunque introdurre la seguente distinzione:

> **Definizione 1.1.1. Modelli a tempo discreto o a tempo continuo.**
> Nei modelli a tempo discreto il tempo varia nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ mentre nei modelli a tempo continuo il tempo varia in un intervallo reale che possiamo identificare con $[0, +\infty)$.

Una seconda classificazione si ha in base al numero delle variabili di stato. Tratteremo nel seguito solo il caso in cui le variabili di stato assumono valori reali.

> **Definizione 1.1.2. Modelli unidimensionali o n-dimensionali.**
> Nei modelli unidimensionali si ha una sola variabile di stato reale mentre nei modelli n-dimensionali si hanno n variabili di stato reali.

Nei modelli unidimensionali la variabile di stato è quindi una funzione reale di variabile reale $x(t)$. Nel caso particolare in cui il modello sia a tempo discreto, tale funzione, essendo definita sull'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, è una successione e verrà indicata con

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_t, \dots$$

o con x_t, $t \in \mathbb{N}$. Nei modelli n-dimensionali le variabili di stato possono essere raccolte in un vettore di funzioni reali o di successioni reali che verranno rappresentate nel seguito come vettori colonna:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \\ \dots \\ \dots \\ x_t^n \end{bmatrix}$$

La legge di evoluzione, come abbiamo ricordato, lega tra loro i valori delle variabili di stato al tempo t con il loro tasso di crescita e si differenzia quindi a seconda della tipologia di modelli.

Nei modelli discreti il tasso di crescita si ottiene confrontando tra loro i valori delle variabili di stato in istanti successivi e la legge di evoluzione si traduce allora in una *equazione alle differenze finite* per i modelli unidimensionali o in un *sistema di equazioni alle differenze finite* per i modelli n-dimensionali.

Nei modelli continui il tasso di crescita è rappresentato dalle derivate della variabili di stato rispetto al tempo t e la legge di evoluzione si traduce in una *equazione differenziale* nel caso di modelli unidimensionali o in un *sistema di equazioni differenziali* per i modelli n-dimensionali.

Accanto alla legge di evoluzione è sempre presente una condizione iniziale che assegna il valore delle variabili di stato in corrispondenza ad un preciso istante temporale t_0 a partire dal quale si vuole studiare l'evoluzione nel tempo del sistema. Se non diversamente specificato, nel seguito si sceglierà $t_0 = 0$.
Nei successivi paragrafi studieremo alcuni importanti classi di modelli continui e discreti che si incontrano di frequente nelle applicazioni.

1.2 Modelli continui unidimensionali del primo ordine

Molti fenomeni che governano il mondo reale sono traducibili in equazioni differenziali. Un contesto economico (e biologico) in cui si incontrano modelli di questo tipo è la demografia matematica, scienza che studia la dinamica delle popolazioni. Il modello più semplice di crescita di una singola popolazione è il **modello di Malthus**, formulato nel 1798. Le ipotesi del modello sono molto semplificate ed ideali:

i) gli individui che compongono la popolazione si possono considerare identici (popolazione omogenea);

ii) la popolazione è isolata, non ci sono quindi immigrazioni o emigrazioni;

iii) le risorse a disposizione della popolazione sono illimitate e quindi non nasce competizione tra gli individui per assicurarsi le risorse necessarie alla sopravvivenza.

In queste ipotesi, gli unici fattori che possono influenzare il numero di individui della popolazione sono la fertilità e la mortalità. Malthus ipotizzò che il numero di nuovi nati fosse proporzionale al numero di individui in vita così come il numero di morti. Detto $x(t)$ il numero di individui della specie presenti al tempo t, la sua variazione nel tempo, misurata dalla derivata prima $x'(t)$, dipende quindi dai tassi di natalità (ν) e di mortalità (μ). Il modello è descritto dalla seguente equazione differenziale

$$x'(t) = (\nu - \mu)x(t) \tag{1.2.1}$$

dove $(\nu - \mu)$ è detto *potenziale biologico* della popolazione o *tasso di crescita.*
La soluzione di questa equazione, come vedremo in seguito, è $x(t) = x_0\, \mathrm{e}^{(\nu-\mu)t}$ dove $x(0) = x_0$ rappresenta il numero di individui presenti al tempo iniziale $t_0 = 0$: nel lungo periodo si prevede quindi un accrescimento illimitato della popolazione se il tasso di crescita $\frac{x'(t)}{x(t)} = (\nu - \mu)$ risulta positivo mentre un'estinzione completa se tale tasso è negativo. La popolazione rimane invece costante se il tasso di crescita è nullo.
Un modello biologico di dinamica di una singola popolazione più complesso è quello che **Verhulst** propose nel 1838. Egli introdusse nella legge di evoluzione un fattore

che tiene conto della competizione intraspecifica tra gli individui della popolazione in accordo con il principio che ad alte densità si ha una diminuzione di fertilità ed un aumento di mortalità. Supponendo che il tasso di natalità ν e mortalità μ varino nel tempo linearmente in funzione del numero di individui presenti nella popolazione al tempo t si ha:

$$\nu(t) = \alpha - \widetilde{\alpha} x(t) \quad \mu(t) = \beta + \widetilde{\beta} x(t)$$

con $\alpha, \widetilde{\alpha}, \beta, \widetilde{\beta}$ costanti positive, $\alpha > \beta$. In queste ipotesi il tasso di crescita risulta

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \nu(t) - \mu(t) = (\alpha - \beta) - (\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}) x(t).$$

Posto $r = \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}$ ed $M = \frac{\alpha - \beta}{\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}}$, si ottiene la seguente equazione differenziale, nota come *equazione logistica*

$$x'(t) = r x(t)(M - x(t)), \quad r > 0, \ M > 0. \tag{1.2.2}$$

Se il numero di individui presenti nel sistema è basso, l'equazione di Verhulst può essere approssimata con l'equazione di Malthus, mentre all'aumentare del numero di individui l'equazione di Verhulst tiene conto dell'influenza delle condizioni ambientali: il tasso di crescita $\frac{x'(t)}{x(t)} = r(M - x(t))$ decresce fino a diventare negativo quando $x(t) > M$. La soluzione dell'equazione logistica, come vedremo in seguito, è

$$x(t) = \frac{M x_0 \, \mathrm{e}^{Mrt}}{M - x_0 + x_0 \, \mathrm{e}^{Mrt}}$$

Osserviamo che nel lungo periodo non si ha una crescita illimitata della popolazione, ma un assestamento su un valore stabile:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = M.$$

Nella Figura 1, posto $M = 3$, la curva tratteggiata rappresenta la soluzione corrispondente alla condizione iniziale $x(0) = 1 < M$, mentre la curva disegnata con linea continua rappresenta la soluzione corrispondente alla condizione iniziale $x(0) = 5 > M$.
I modelli di Malthus e Verhulst some esempi di modelli continui unidimensionali. La variabile di stato $x(t)$ è una funzione reale che rappresenta la popolazione presente al tempo t e che sarà pertanto definita in un opportuno intervallo reale. La legge di evoluzione è una equazione differenziale ordinaria [1] di ordine $k \geq 1$, ossia una equazione che lega tra loro i valori della una funzione incognita $x(t)$ e delle sue derivate successive $x^{(i)}(t)$, $1 \leq i \leq k$:

$$F(t, x(t), x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \cdots, x^{(k)}(t)) = 0$$

[1] Una equazione differenziale viene detta ordinaria quando la funzione incognita dipende da una sola variabile indipendente che rappresenta nel nostro caso il tempo t.

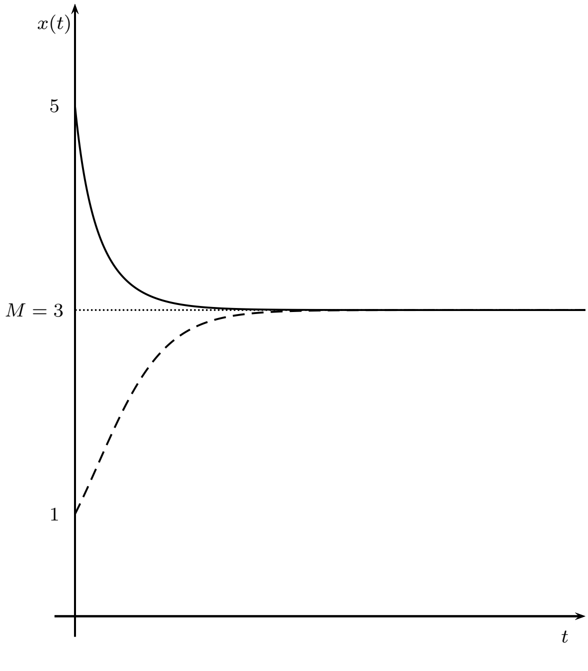

Figura 1 Andamento delle soluzioni dell'equazione logistica

dove F è una funzione reale nelle $(k+2)$ variabili $t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$. Se F non dipende esplicitamente dal tempo, l'equazione viene detta *autonoma*. Se F è un polinomio di primo grado nelle variabili $x, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k)}$ l'equazione viene detta *lineare*.
Una equazione differenziale di ordine k è detta in *forma normale* se il valore della derivata di ordine massimo, $x^{(k)}(t)$, è espresso in funzione delle derivate di ordine inferiore:

$$x^{(k)}(t) = f(t, x(t), x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \cdots, x^{(k-1)}(t)) \tag{1.2.3}$$

dove f è una funzione reale nelle $(k+1)$ variabili $t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(k-1)}$.
Le equazioni (1.2.1) e (1.2.2) sone esempi di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale.

Definizione 1.2.1. Si dice *soluzione* o *integrale* dell'equazione differenziale (1.2.3) una funzione reale ϕ definita in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e ivi k volte derivabile, tale che per ogni $t \in I$, i punti $\big(t, \phi(t), \dots \phi^{(k-1)}(t)\big)$ appartengono al dominio di f e

$$\phi^{(k)}(t) = f(t, \phi(t), \phi^{(1)}(t), \phi^{(2)}(t), \cdots, \phi^{(k-1)}(t)), \quad \forall t \in I.$$

L'insieme di tutte le soluzioni viene detto *integrale generale* dell'equazione differenziale.

Risolvere, o integrare, l'equazione differenziale (1.2.3) significa determinarne l'integrale generale che risulta costituito da una famiglia di funzioni dipendenti da uno o più parametri.
Il *problema di Cauchy* o *problema delle condizioni iniziali* associato alla equazione differenziale (1.2.3), consiste nel trovare una soluzione dell'equazione differenziale che soddisfa le k condizioni iniziali:

$$x(t_0) = x_0,\ x^{(1)}(t_0) = x_1, \cdots, x^{(k-1)}(t_0) = x_{k-1}$$

che assegnano i valori della funzione x, e di tutte le sue derivate successive fino all'ordine $(k-1)$, in uno stesso punto iniziale t_0. La soluzione che soddisfa le condizioni iniziali assegnate viene detta *integrale particolare*[(2)].
Nei prossimi paragrafi dedicheremo particolare attenzione alle equazioni del primo ordine in forma normale:

$$x'(t) = x^{(1)}(t) = f(t, x(t)) \tag{1.2.4}$$

ed al relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2.5}$$

[(2)] È possibile cercare delle soluzioni di una equazione differenziale assegnando condizioni diverse da quelle proposte da Cauchy. Ad esempio per una equazione differenziale del secondo ordine è possibile cercare una soluzione che assuma in due punti fissati valori assegnati (*problema al contorno*). Problemi di questo genere sono più complicati da trattare e anche sotto condizioni di regolarità per f, non ammettono soluzione o non ammettono soluzione unica.

per il quale presenteremo nel paragrafo successivo un teorema di esistenza ed unicità locale.
Un primo semplice esempio di equazioni differenziali del primo ordine è il seguente

$$x'(t) = f(t)$$

dove il secondo membro è indipendente da x. Nel caso in cui la funzione f sia continua in un intervallo (a, b), dalla teoria del calcolo integrale, sappiamo che l'equazione ammette infinite soluzioni che differiscono tra loro per una costante arbitraria. L'integrale generale è costituito dall'insieme delle primitive di f e viene indicato con il simbolo

$$x(t) = \int f(t)dt.$$

Se richiediamo alla primitiva $x(t)$ di soddisfare una opportuna condizione iniziale, $x(t_0) = x_0$, si ottiene l'unica soluzione

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds + x_0.$$

Si osservi che anche in questo caso molto particolare, risulta talvolta difficile se non impossibile determinare in modo esplicito le soluzioni dell'equazione differenziale: basti pensare, ad esempio, alla ricerca di primitive della funzione $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$. Questa difficoltà si avrà allora a maggior ragione nel caso più generale dell'equazione (1.2.4).

1.2.1 Teoremi di esistenza ed unicità

In questo paragrafo presenteremo due importanti teoremi riguardanti l'esistenza e l'unicità della soluzione di una equazione differenziale del primo ordine in forma normale:

- il primo è un risultato di *esistenza ed unicità locale* per il problema di Cauchy (1.2.5), che garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione in un intorno del punto iniziale t_0, senza precisare l'intervallo in cui tale soluzione è definita;

- il secondo è invece un teorema di *esistenza ed unicità globale* che sotto opportune ipotesi di crescita della funzione f garantisce esistenza ed unicità della soluzione del problema (1.2.5) in un prefissato intervallo contenente t_0.

Ricordiamo che il simbolo f_x indica la derivata parziale di f rispetto alla variabile x.

Teorema 1.2.2 (Teorema di esistenza ed unicità locale[(3)]). *Se le funzioni $f(t,x)$ e $f_x(t,x)$ sono continue in un insieme aperto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e $(t_0, x_0) \in D$, allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione definita in un intorno di t_0.

Non presenteremo la dimostrazione di questo fondamentale risultato, per la quale rinviamo, ad esempio, al testo Pagani e Salsa (2009), ma ci limitiamo ad osservare, nel successivo esempio, come la sola continuità della funzione $f(t,x)$, sebbene si possa dimostrare essere sufficiente per l'esistenza, non garantisce in generale l'unicità della soluzione.

Esempio 1.2.3. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = 2\sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Si noti che la funzione costante $\phi(t) = 0$ è una soluzione del problema di Cauchy, così come le funzioni

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ t^2 & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

e

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 1 \\ (t-1)^2 & \text{per } t > 1 \end{cases}$$

Più in generale, ogni funzione

$$\phi_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq k \\ (t-k)^2 & \text{per } t > k \end{cases}$$

con $k \geq 0$ è soluzione del problema di Cauchy.

Un'altra importante osservazione riguardo al Teorema 1.2.2 è la seguente: anche se le sue ipotesi sono soddisfatte in $D = \mathbb{R}^2$, non è detto che la soluzione sia definita in tutto $\mathbb{R}$. Si consideri al proposito il seguente esempio

Esempio 1.2.4. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

[(3)] Per versioni più deboli del teorema si veda ad esempio Pagani e Salsa (2009)).

La funzione $f(t,x) = x^2$ è continua in $\mathbb{R}^2$ insieme alla sua derivata parziale $f_x(t,x) = 2x$. Inoltre, essendo $x(0) = 1$, si ha sicuramente $x(t) \neq 0$ in un intorno dell'origine e possiamo quindi dividere entrambi i membri per $x(t)$

$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1$$

Utilizzando il metodo di integrazione per sostituzione (si veda Appendice 2) si ottiene

$$\int \frac{x'(t)}{x^2(t)} dt = \int 1\ dt \Rightarrow -\frac{1}{x(t)} = t + c$$

con c costante arbitraria. Ricavando $x(t)$ si ottiene $x(t) = -\dfrac{1}{t+c}$ e imponendo la condizione iniziale, si arriva infine alla soluzione

$$\varphi(t) = -\frac{1}{t-1}$$

che non risulta definita in tutto $\mathbb{R}$ ma solo nell'intervallo $(-\infty, 1)$ che contiene il punto iniziale $t_0 = 0$.

Se vogliamo garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione in un prefissato intervallo $[a,b]$ contenente t_0, possiamo imporre delle condizioni di crescita alla funzione f che forzino la soluzione a muoversi tra funzioni definite in tutto l'intervallo $[a,b]$. Se ad esempio supponiamo che la funzione f sia limitata in $[a,b] \times \mathbb{R}$, cioè

$$|f(t,x)| \leq M, \forall (t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}$$

si ha

$$-M \leq x'(t) \leq M, \quad \forall t \in [a,b].$$

ed integrando tra t_0 e t si ottiene

$$x_0 - M(t - t_0) \leq x(t) \leq x_0 + M(t - t_0), \forall t \in [a,b].$$

Il grafico della soluzione $x(t)$ è quindi necessariamente compreso tra quello delle due rette di equazione $x = x_0 \pm M(t - t_0)$ e di conseguenza la soluzione della equazione differenziale esiste in tutto $[a,b]$.

Nel prossimo enunciato generalizziamo quanto detto richiedendo alla funzione f una crescita al più lineare in x.

> **Teorema 1.2.5** (Teorema di esistenza ed unicità globale)**.** *Supponiamo che f soddisfi le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale in un insieme aperto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ contenente la striscia $S = [a,b] \times \mathbb{R}$. Se esistono due costanti non negative h e k tali che*
>
> $$|f(t,x)| \leq h + k|x|, \quad \forall (t,x) \in S \tag{1.2.6}$$

allora la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove $(t_0, x_0) \in (a, b) \times \mathbb{R}$, *è definita in tutto l'intervallo* $[a, b]$.

Osserviamo che una condizione sufficiente per la validità della (1.2.6) è la limitatezza della derivata parziale prima f_x in S.

Esempio 1.2.6.

1) Consideriamo il problema di Cauchy associato ad una equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha(t)x(t) + \beta(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

dove i coefficienti α e β sono funzioni continue in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ contenente t_0.

Fissiamo un intervallo $[a, b] \subseteq I$ contenente t_0 e poniamo $h = \max_{t\in[a,b]} \beta(t)$, $k = \max_{t\in[a,b]} \alpha(t)$. La (1.2.6) risulta quindi soddisfatta in $[a, b] \times \mathbb{R}$ ed il problema di Cauchy ammette una sola soluzione definita in tutto $[a, b]$.

Dato che gli estremi a e b possono essere scelti in modo arbitrario purché $[a, b] \subseteq I$, la soluzione è prolungabile in tutto I. Abbiamo quindi dimostrato il seguente importante risultato: *le soluzioni di ogni equazione differenziale lineare sono prolungabili in tutto l'intervallo di continuità dei coefficienti.*

2) Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\ \arctan(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Essendo $f(x, t) = x\ \arctan(x)$ continua in $\mathbb{R}^2$ insieme alla sua derivata $f_x = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}$, osservando che $| f(x, t) | \leq \frac{\pi}{2} | x |$, per ogni $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, possiamo garantire che il problema di Cauchy ammette una soluzione definita in tutto $\mathbb{R}$ per ogni scelta di (t_0, x_0).

Il Teorema di esistenza ed unicità locale 1.2.2 ha un'interessante interpretazione geometrica: esso ci consente di disegnare nel piano cartesiano il grafico di una qualunque soluzione del problema di Cauchy anche quando non riusciamo a calcolarne esplicitamente una espressione analitica. Tale grafico viene comunemente denominato *curva integrale.*

Consideriamo l'equazione differenziale $x'(t) = f(t, x(t))$. In un piano cartesiano riportiamo lungo l'asse delle ascisse i valori della variabile indipendente t, mentre

lungo l'asse delle ordinate i valori della variabile di stato $x(t)$. In corrispondenza ad ogni punto del piano $(\bar{t}, \overline{x})$ conosciamo il coefficiente angolare della retta tangente alla curva integrale passante per quel punto data da $x'(\bar{t}) = f(\bar{t}, \overline{x})$. Spiccando dal punto $(\bar{t}, \overline{x})$ un segmento di inclinazione pari a $x'(\bar{t})$ e iterando tale procedimento, si costruisce il *campo delle direzioni* dell'equazione differenziale. Dal campo delle direzioni abbiamo un'idea qualitativa dell'andamento delle soluzioni.
Si osservi che per il teorema di esistenza ed unicità locale due curve integrali non possono mai intersecarsi.

Esempio 1.2.7. Disegniamo le curve integrali dell'equazione differenziale $x'(t) = x(t)\arctan(x(t))$. Dall'esempio 1.2.6 sappiamo che i problemi di Cauchy associati a tale equazione ammettono un'unica soluzione definita in tutto $\mathbb{R}$. Si noti poi che essendo $f(t,x) = x\arctan(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$, le soluzioni sono funzioni crescenti. Per quanto concerne la concavità/convessità delle soluzioni, si ha

$$x''(t) = x'(t)\left(\arctan x(t) + x(t)\frac{1}{1+x^2(t)}\right)$$

e quindi $x''(t) > 0$ se e solo se $x(t) > 0$. Dato che, per il teorema di esistenza ed unicità locale, due curve integrali non si possono mai intersecare, osservando che $x(t) = 0$ è la soluzione che corrisponde alla condizione iniziale $x(t_0) = 0$, per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, il grafico qualitativo delle curve integrali è rappresentato in Figura 2. Le funzioni risultano convesse e crescenti se $x(t_0) > 0$, concave e crescenti se $x(t_0) < 0$.

1.2.2 Alcune tipologie di equazioni differenziali del primo ordine

In questo paragrafo esamineremo alcune tipologie di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale. La soluzione generale, quando calcolabile, dipenderà da una costante arbitraria in mancanza di una esplicita condizione iniziale.

1.2.2.1 Equazioni differenziali a variabili separabili

Le equazioni differenziali a variabili separabili sono equazioni della forma:

$$x'(t) = A(t) \cdot B(x(t)).$$

Se A è una funzione continua in un intervallo aperto I e B è derivabile con continuità in un intervallo aperto J, sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale nel sottoinsieme $I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$.
Se $B(x) = B$ costante, l'equazione differenziale si riduce alla ricerca delle primitive di una funzione continua. Nel caso più significativo in cui $B(x)$ non sia costante, per integrare l'equazione differenziale si procede come segue. Se $B(\overline{x}) = 0$, la funzione costante $x(t) = \overline{x}$ è un integrale particolare dell'equazione differenziale definita su tutto I. Sia invece $x(t)$ una soluzione non costante definita in $I' \subseteq I$. Per il teorema di esistenza ed unicità locale risulta necessariamente $B(x(t)) \neq 0$ per ogni $t \in I'$. Se infatti $B(x(\bar{t})) = 0$ in corrispondenza ad un opportuno $\bar{t} \in I'$,

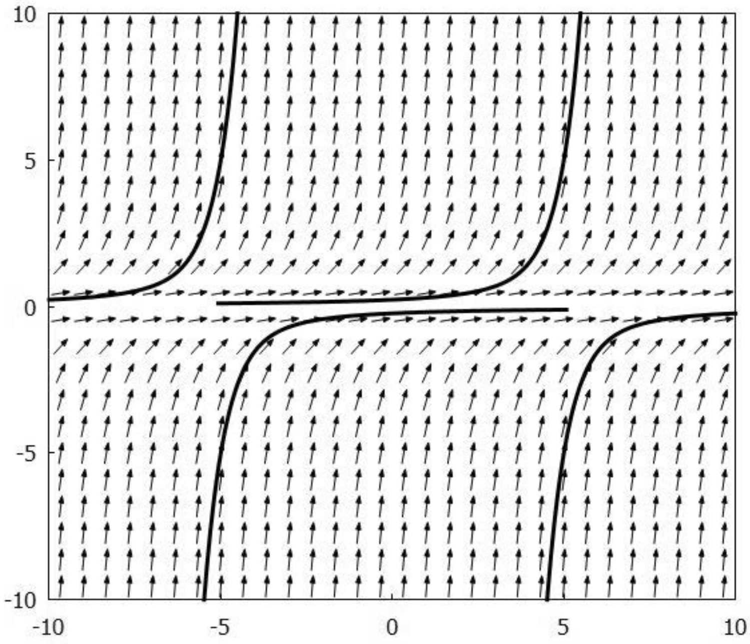

Figura 2 Il campo di direzioni dell'equazione $x'(t) = x(t)\ \arctan(x(t))$