Capitolo 1

Teoria delle decisioni

1.1 Preferenze e utilità

La teoria della scelta razionale presuppone che ciascun agente economico, d'ora in poi individuo, o investitore, o consumatore, abbia delle preferenze sulle azioni a sua disposizione e scelga l'azione da lui preferita.

In un problema caratterizzato da certezza, a ogni azione è associata una conseguenza. Esiste pertanto una corrispondenza biunivoca tra le preferenze sulle azioni e le, più intuitive, preferenze sulle conseguenze: un individuo razionale preferisce, e quindi sceglie, l'azione che conduce alla conseguenza da lui preferita.

Sia X l'insieme di tutte le possibili conseguenze e $\succeq$ una relazione binaria di preferenza debole su coppie di conseguenze, da interpretarsi come «almeno altrettanto buono di», «non peggiore di». È una relazione soggettiva: individui diversi hanno, in genere, preferenze diverse.

Affinché le preferenze sulle conseguenze siano in grado di determinare la scelta razionale in qualsiasi problema decisionale, è necessario che la relazione di preferenza debole $\succeq$ soddisfi due assiomi.

Definizione 1.1 $\succeq$ *è completa se, date due conseguenze* x *e* y, $x \succeq y$, *oppure* $y \succeq x$, *oppure entrambi.*

Se $x \succeq y$ e $y \succeq x$, l'individuo è indifferente tra x e $y : x \sim y$. Se $x \succeq y$ e non è vero che $y \succeq x$, l'individuo preferisce x a $y : x \succ y$.

L'assioma di completezza richiede che, date due conseguenze x e y, l'individuo sia sempre in grado di dire se preferisce x a y, y a x, o è indifferente tra le due alternative.

DEFINIZIONE 1.2 *$\succeq$ è transitiva se, date tre conseguenze, x, y e z, con $x \succeq y$ e $y \succeq z$, si ha $x \succeq z$.*

Una relazione analoga vale se sostituiamo $\succeq$ con $\sim$ oppure con $\succ$. Opportunamente interpretata, vale anche con combinazioni di $\succeq$, $\sim$ e $\succ$. Per esempio, se $x \succ y$ e $y \sim z$, si deve avere $x \succ z$.

L'assioma di transitività eclude la possibilità che $x \succ y$, $y \succ z$ e $z \succ x$. Un individuo con queste preferenze non sarebbe in grado di individuare una conseguenza da lui preferita, in quanto, per ogni conseguenza, ne esiste un'altra che egli considera migliore.

Questi due assiomi garantiscono che il problema di scelta razionale in condizioni di certezza ha una soluzione: l'individuo è sempre in grado di identificare l'azione o le azioni da lui preferite. Se due o più azioni sono per lui ottime, daranno luogo a conseguenze tra le quali è indifferente.

Potrebbe essere utile descrivere le preferenze sulle conseguenze di un individuo mediante una funzione di utilità. Questo permetterebbe di analizzare i problemi decisionali utilizzando l'analisi matematica. Nel mondo reale, nel quale le quantità acquistate sono necessariamente multipli di un'unità di misura, se valgono gli assiomi di completezza e di transitività, è possibile.

PROPOSIZIONE 1.1 *Se $\succeq$ è completa e transitiva ed esiste un numero finito oppure un'infinità numerabile di conseguenze, esiste una funzione di utilità sulle conseguenze $u : X \to \mathbb{R}$ tale che*

$$x \succeq y \;\Leftrightarrow\; u(x) \geq u(y). \tag{1.1}$$

Dall'EQ. (1.1), si ottiene poi che

$$x \succ y \;\Leftrightarrow\; u(x) > u(y) \tag{1.2}$$

e

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; u(x) = u(y)\,. \tag{1.3}$$

La PROP. 1.1 afferma che un individuo razionale, il quale sceglie l'azione da lui preferita, cioè l'azione che conduce alla conseguenza da lui preferita, deve scegliere l'azione che conduce alla conseguenza alla quale è associata l'utilità più elevata. Sinteticamente, diremo che, in un problema decisionale caratterizzato da certezza, un individuo razionale massimizza la sua utilità.

Nella realtà quotidiana, il numero di conseguenze è finito. Tuttavia, per poter utilizzare l'analisi matematica, i modelli economico-finanziari ipotizzano spesso che le quantità di beni e di titoli che possono essere acquistati siano numeri reali, eventualmente non negativi. In questo caso, gli assiomi di completezza e di transitività non sono, da soli, sufficienti a garantire l'esistenza di una funzione di utilità. Per questo motivo, viene aggiunto un terzo assioma.

DEFINIZIONE 1.3 $\succeq$ *è continua se, per ogni successione* $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$*, con* $x^n \succeq y^n$ *per ogni* n, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$ *e* $y = \lim\limits_{n\to\infty} y^n$*, si ha* $x \succeq y$.

Questo assioma richiede che non ci siano «salti» nelle preferenze.

L'esempio classico di preferenze non continue sono le preferenze lessicografiche. Nella scelta tra due panieri di beni, l'individuo preferisce il paniere che contiene una quantità maggiore del primo bene, indipendentemente dalla quantità del secondo bene. Nel caso in cui i due panieri abbiano la stessa quantità del primo bene, preferisce il paniere che contiene una quantità maggiore del secondo bene.

Siano $x^n = (5 + \frac{1}{n}, 0)$ e $y^n = (5, 5)$ due panieri. Per ogni $n > 0$, il primo paniere ha una quantità maggiore del primo bene. Di conseguenza, $x^n \succ y^n$ per ogni n. Tuttavia, al limite, se n tende a infinito, $x = (5, 0)$ e $y = (5, 5)$, e quindi $y \succ x$. La DEF. 1.3 non è soddisfatta. Nel passaggio da una quantità del primo bene superiore a 5, per quanto vicina a 5, a una quantità uguale a 5, si ha una discontinuità: si va da una preferenza per il primo paniere a una preferenza per il secondo, senza passare per l'indifferenza. Questo è quello che l'assioma di continuità esclude che possa accadere.

Con preferenze lessicografiche l'individuo non è mai disposto a cedere un'unità del primo bene, qualsiasi sia la quantità del secondo bene che potrebbe ricevere in cambio. In molti contesti, questo non è realistico.

Le preferenze lessicografiche non possono essere descritte da una mappa di curve di indifferenza, né da una funzione di utilità.

Esiste anche una definizione topologicamente equivalente di continuità delle preferenze sulle conseguenze, che viene ora introdotta perché è simile a quella che caratterizza le preferenze sulle lotterie e che verrà utilizzata successivamente (DEF. 1.6).

DEFINIZIONE 1.4 *La relazione $\succeq$ è continua se, per ogni conseguenza $x \in X$, gli insiemi*

$$\{y \in X \,|y \succeq x\} \quad e \quad \{y \in X \,|x \succeq y\}$$

sono chiusi.

Se vale l'assioma di continuità, la PROP. 1.1 vale senza che venga posto alcun vincolo al numero di conseguenze. La funzione di utilità non solo esiste, ma è anche continua.

PROPOSIZIONE 1.2 *Se $\succeq$ è completa, transitiva e continua, esiste una funzione di utilità continua sulle conseguenze $u : X \to \mathbb{R}$ tale che*

$$x \succeq y \;\Leftrightarrow\; u\,(x) \geq u\,(y)\,. \tag{1.4}$$

La funzione di utilità che descrive le preferenze dell'investitore non è unica. Una trasformazione crescente di una funzione di utilità è anch'essa una funzione di utilità. Inoltre, date due funzioni di utilità che descrivono le stesse preferenze, è sempre possibile ottenere ciascuna di esse come una trasformazione crescente dell'altra.

PROPOSIZIONE 1.3 *Sia $u : X \to \mathbb{R}$ una funzione di utilità che descrive le preferenze di un individuo. La funzione $\hat{u} : X \to \mathbb{R}$ è anch'essa una funzione di utilità che descrive le preferenze di quell'individuo se e solo se*

$$\hat{u}\,(x) = f(u(x))\,,\ \textit{con } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ crescente.} \tag{1.5}$$

L'esistenza di una molteplicità di funzioni di utilità fa sì che il valore di una conseguenza, espresso in termini di utilità, non abbia alcun significato economico.

1.2 Rischio e utilità attesa

In questo lavoro siamo interessati alla teoria della scelta razionale in presenza di rischio o di incertezza, nota anche come teoria delle decisioni. In questo paragrafo analizziamo il caso di rischio.

In una scelta caratterizzata dall'esistenza di rischio, a ogni azione è associata una pluralità di conseguenze, in base a una distribuzione di probabilità esogena, oggettiva e nota a tutti.

In presenza di rischio, una scelta tra azioni è una scelta tra lotterie.

1.2.1 Lotterie semplici e composte

Sia X un insieme di possibili conseguenze, tale che
(i) per ogni coppia $x \in X$ e $y \in X$, con $x \neq y$, si ha

$$x \cap y = \emptyset. \tag{1.6}$$

Le conseguenze sono eventi tra di loro disgiunti. Di conseguenza, per ogni coppia $x \in X$ e $y \in X$, con $x \neq y$,

$$P(x \cup y) = P(x) + P(y)\,.$$

(ii) se Ω è l'evento universale, che contiene tutti gli eventi che possono verificarsi, si ha

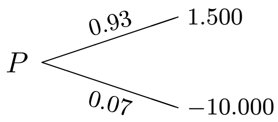
$$\bigcup_{x \in X} x = \Omega. \tag{1.7}$$

L'insieme delle conseguenze è esaustivo: una di esse deve necessariamente verificarsi. Di conseguenza,

$$P(\bigcup_{x \in X} x) = 1.$$

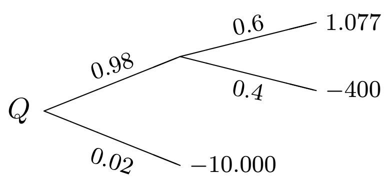
Una lotteria semplice è una distribuzione di probabilità sull'insieme delle conseguenze. L'insieme X è lo stesso per tutte le lotterie. Tuttavia, quando scriveremo una lotteria, ci limiteremo a elencare le sole conseguenze $x \in X$ che, in quella lotteria, si verificano con una probabilità positiva: $P(x) > 0$.

Consideriamo per esempio un investitore che abbia acquistato 10.000 euro di obbligazioni governative con un orizzonte temporale di un anno. Il tasso di interesse è del 15%, mentre la probabilità di *default* è del 7%. Tale investitore possiede la lotteria seguente, espressa in termini di guadagni e di perdite, in euro.



In alcuni casi, è necessario considerare lotterie composte, ovvero lotterie di lotterie.

Ipotizziamo che un individuo abbia investito 10.000 euro nell'acquisto di un titolo, espresso in valuta locale, caratterizzato da un tasso di interesse del 20% e da una probabilità di *default* del 2%. Il tasso di cambio odierno è 12 (un euro vale dodici unità della valuta locale), mentre tra un anno c'è una probabilità 0.6 che sia 13 e 0.4 che sia 15. Questo individuo possiede la lotteria seguente, espressa in termini di guadagni e di perdite, in euro.



Le relazioni di preferenza debole, indifferenza e preferenza (stretta) sono generalmente definite sull'oggetto di scelta, ovvero le azioni a disposizione dell'individuo. Questa è la conseguenza logica dell'approccio delle preferenze rivelate: se, tra due azioni, un individuo sceglie la prima, tale individuo preferisce la prima azione alla seconda. Se avesse preferito la seconda azione, avrebbe scelto la seconda azione. La scelta rivela la preferenza.

In problemi decisionali caratterizzati da rischio, l'oggetto di scelta è una lotteria. L'individuo deve quindi avere un ordinamento di preferenza sull'insieme delle lotterie.

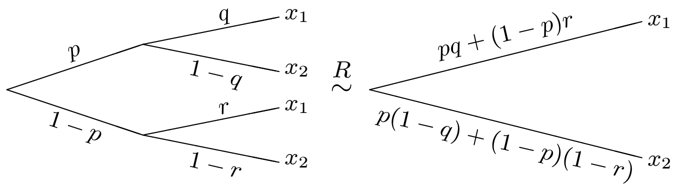
La teoria delle decisioni non permette, però, in genere, che le preferenze sulle lotterie siano completamente svincolate dalle preferenze sulle conseguenze. L'ipotesi usuale è che l'individuo sia interessato alle possibili conseguenze delle sue azioni e alle probabilità di ottenere tali conseguenze, ma non al modo, alla procedura che conduce a tali conseguenze. Per esempio, un individuo razionale interessato unicamente alla sua ricchezza deve essere indifferente tra lanciare un dado «onesto» e vincere 100 euro nel caso in cui esca il numero 6 e lanciarne due e vincere 100 euro nel caso in cui la somma dei due numeri sia 7, in quanto, in entrambi i casi, la probabilità di vincere 100 euro è $1/6$. Questa idea è alla base dell'assioma di riduzione di lotterie composte, che verrà tra poco definito.

L'esempio appena visto presuppone che l'investitore sia in grado di calcolare correttamente le probabilità delle conseguenze. Questo è un requisito della teoria delle decisioni, la quale ipotizza che un individuo razionale sia in grado di risolvere qualsiasi problema logico-matematico.

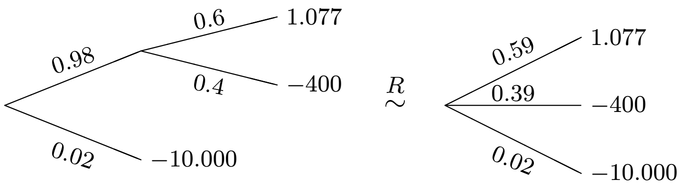
Nell'esempio abbiamo anche ipotizzato che la valutazione dell'individuo di una vincita di 100 euro sia la stessa se nella seconda lotteria escono i numeri 6 e 1 oppure i numeri 4 e 3. Questo non è un requisito della teoria delle decisioni. Se l'individuo provasse un piacere particolare a osservare il numero 6, vincere 100 euro con l'estrazione dei numeri 6 e 1 sarebbe una conseguenza diversa, e preferita, rispetto a vincere 100 euro con l'estrazione dei numeri 4 e 3. In questo caso, con due diverse conseguenze, l'individuo potrebbe preferire la prima lotteria alla seconda senza violare l'assioma di riduzione di lotterie composte.

Diamo ora una definizione di tale assioma considerando, per semplicità, una lotteria composta costituita da due sole lotterie semplici, ciascuna con due sole conseguenze. L'estensione a lotterie più complesse è immediata.

Definizione 1.5 *L'assioma di riduzione di lotterie composte (R) richiede che*



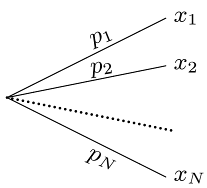
Nell'esempio precedente, in base a tale assioma, si ha



1.2.2 Assioma di indipendenza

L'assioma di riduzione di lotterie composte permette di individuare, per ogni lotteria, per quanto complessa, una lotteria semplice, tale che un individuo razionale deve essere indifferente tra le due lotterie. Utilizzando l'assioma di transitività, la scelta tra lotterie può quindi essere sempre ricondotta a una scelta tra lotterie semplici.

Sia $\mathfrak{L}$ l'insieme delle lotterie semplici e $P = (x_1, x_2, \ldots, x_N; p_1, p_2, \ldots, p_N)$ una di queste lotterie.



$$\text{con } \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$$

Gli assiomi di completezza e di transitività coincidono con quelli visti in precedenza (deff. 1.1 e 1.2), con la relazione $\succeq$ che fa ora riferimento alle lotterie e non più alle conseguenze. L'assioma di continuità richiede invece di adattare opportunamente la def. 1.4.

DEFINIZIONE 1.6 *Sia $\alpha P + (1-\alpha)\, Q$ una lotteria composta che, con probabilità α, ha come esito la lotteria P e, con probabilità $1-\alpha$, la lotteria Q. La relazione $\succeq$ è continua se, per ogni $P, Q, S \in \mathfrak{L}$, gli insiemi*

$$\{\alpha \in [0,1]\, | \alpha P + (1-\alpha)\, Q \succeq S\} \quad e \quad \{\alpha \in [0,1]\, | S \succeq \alpha P + (1-\alpha)\, Q\}$$

sono chiusi.

Anche in questo caso, l'assioma di continuità richiede che non ci siano salti nelle preferenze.

Ipotizziamo che $P \succ S \succ Q$. All'aumentare di α, da zero a uno, la lotteria $\alpha P + (1-\alpha)\, Q$ migliora, passando da una lotteria peggiore di S a una migliore. La DEF. 1.6 richiede che, se ci muoviamo con continuità, non è possibile passare da una situazione peggiore di S a una migliore senza raggiungere una situazione di indifferenza. Deve esistere un valore $\bar{\alpha} \in (0,1)$ tale che

$$\bar{\alpha} P + (1-\bar{\alpha})\, Q \sim S.$$

Se $\succeq$ è completa, transitiva e continua, una proposizione simile alla PROP. 1.2 assicura che le preferenze sulle lotterie possono essere descritte mediante una funzione di utilità sulle lotterie $U : \mathfrak{L} \to \mathbb{R}$ tale che

$$P \succeq Q \;\Leftrightarrow\; U(x_1, \ldots, x_N; p_1, \ldots, p_N) \geq U(x_1, \ldots, x_N; q_1, \ldots, q_N)\,.$$

La funzione U è definita sull'insieme delle lotterie, mentre la funzione u del paragrafo precedente era definita sull'insieme delle conseguenze.

Sarebbe auspicabile poter scrivere la funzione di utilità sulle lotterie

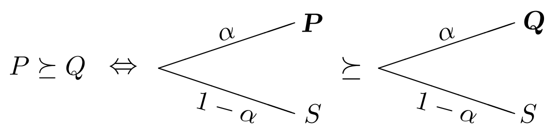
$$U(x_1, x_2, \ldots, x_N; p_1, p_2, \ldots, p_N)$$

in termini di una funzione di utilità sulle conseguenze, $u(x_i)$, e di una funzione sulle probabilità, $\pi(p_i)$. In assenza di ulteriori ipotesi sulle preferenze, non è possibile. Lo è, invece, se vale l'assioma di indipendenza.

DEFINIZIONE 1.7 *$\succeq$ soddisfa l'assioma di indipendenza se, per ogni $P, Q, S \in \mathfrak{L}$ e per ogni $\alpha \in [0,1]$, si ha*

$$P \succeq Q \;\Leftrightarrow\; \alpha P + (1-\alpha) S \succeq \alpha Q + (1-\alpha) S.$$

Graficamente,

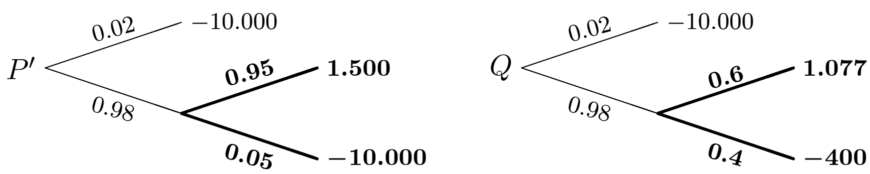


L'assioma vale anche se sostituiamo $\succeq$ con $\sim$ o con $\succ$; in quest'ultimo caso, α deve essere positivo.

Le due lotterie composte del lato destro di tale assioma danno, con la stessa probabilità, $1-\alpha$, la stessa lotteria, S. Inoltre, con la stessa probabilità, α, la prima lotteria dà P, la seconda Q. L'assioma di indipendenza richiede che, nella scelta tra le due lotterie, è possibile trascurare le parti comuni e concentrare l'attenzione sulle differenze, in grassetto nella figura: se un individuo preferisce P a Q, deve preferire la prima lotteria alla seconda.

Questo assioma permette talvolta di semplificare il problema di scelta. Consideriamo a tale proposito le lotterie P e Q introdotte nel paragrafo precedente. Nel grafico che segue, P' è equivalente, in termini di conseguenze e di probabilità, a P, con l'approssimazione delle probabilità, come al solito, a due cifre decimali. Per l'assioma di riduzione di lotterie composte, $P \sim P'$. Per l'assioma di transitività, P è preferita a Q se e solo se P' è preferita a Q.

Il ramo superiore delle lotterie P' e Q descrive la parte comune delle due lotterie. Per l'assioma di indipendenza, l'individuo confronta le lotterie in grassetto e preferisce P a Q se e solo se preferisce una lotteria che gli fa guadagnare 1.500 euro con una probabilità del 95% e gli fa perdere 10.000 euro con una probabilità del 5% a una lotteria che gli fa guadagnare 1.077 euro con una probabilità del 60% e gli fa perdere 400 euro con una probabilità del 40%.



1.2.3 Utilità attesa

L'assioma di indipendenza non è utile solamente a semplificare il confronto tra lotterie, ma permette anche di riscrivere la funzione di utilità sulle lotterie in termini di utilità attesa:

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_N; p_1, p_2, \ldots, p_N) = \sum_{i=1}^{N} p_i u\left(x_i\right). \tag{1.8}$$

Vale, infatti, il teorema seguente.

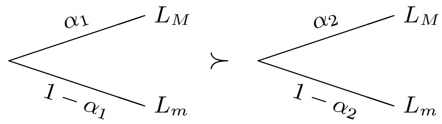
TEOREMA 1.1 (VON NEUMANN E MORGENSTERN) *Se $\succeq$ è completa, transitiva, continua e soddisfa l'assioma di indipendenza, può essere rappresentata in termini di utilità attesa, cioè esiste una funzione di utilità sulle conseguenze $u : X \to \mathbb{R}$ tale che, date due lotterie $P = (x_1, x_2, \ldots, x_N; p_1, p_2, \ldots, p_N)$ e $Q = (x_1, x_2, \ldots, x_N; q_1, q_2, \ldots, q_N)$, si ha*

$$P \succeq Q \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{N} p_i u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{N} q_i u(x_i). \tag{1.9}$$

L'EQ. (1.9) vale anche se sostituiamo $\succeq$ con $\sim$ oppure con $\succ$; il segno del lato destro diventerà, rispettivamente, $=$ e $>$.

Data l'importanza di questo teorema, può essere utile dare un'idea di come possa essere dimostrato. Definiamo dapprima le lotterie migliori e peggiori che è possibile immaginare: $L_M \succeq L$ e $L \succeq L_m$ per ogni $L \in \mathfrak{L}$. Escludendo il caso in cui l'individuo sia indifferente tra tutte le lotterie, si ha $L_M \succ L_m$.

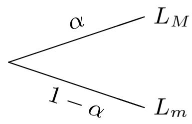
È facile verificare che l'assioma di indipendenza richiede che valga la condizione seguente, peraltro molto intuitiva.



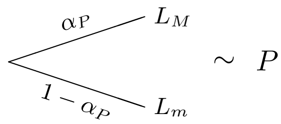
$\Leftrightarrow \;\alpha_1 > \alpha_2$

L'individuo preferisce la lotteria che dà la lotteria migliore, L_M, con la probabilità più elevata e la lotteria peggiore, L_m, con la probabilità più bassa.

Consideriamo ora una lotteria P, con $L_M \succ P \succ L_m$. Se nella lotteria



poniamo $\alpha = 0$, questa lotteria è peggiore di P, mentre se $\alpha = 1$, è migliore. Per quanto detto sopra, se aumentiamo α, miglioriamo la lotteria. L'assioma di continuità richiede che se ci muoviamo con continuità da $\alpha = 0$ a $\alpha = 1$, e quindi passiamo da una lotteria peggiore di P a una migliore, deve esistere almeno un valore α_P che rende l'individuo indifferente tra le due lotterie:



Questo valore di α_P è unico. Se poniamo

$$U(P) = \alpha_P, \tag{1.10}$$

abbiamo una funzione di utilità sulle lotterie: quanto migliore è la lotteria, tanto più elevato è il valore di α che garantisce il soddisfacimento della condizione di indifferenza nella figura sopra.

È possibile dimostrare che questa funzione di utilità sulle lotterie ha la proprietà dell'utilità attesa, ovvero soddisfa l'EQ. (1.8).

Questa dimostrazione permette anche di ottenere una funzione di utilità sulle conseguenze $u : X \to \mathbb{R}$ con la proprietà dell'utilità attesa. Una conseguenza è infatti una lotteria P degenere, che dà quella conseguenza con una probabilità uguale a uno. È quindi sufficiente che, per ogni conseguenza, l'individuo ci comunichi il valore di α che lo rende indifferente tra ricevere con certezza quella conseguenza e partecipare a una lotteria che, con probabilità α, gli dà la lotteria L_M e, con probabilità $1 - \alpha$, la lotteria L_m.

La funzione di utilità sulle conseguenze così ottenuta è una probabilità, e assume quindi valori compresi tra zero e uno. Non è, però, unica. Vale, infatti, la proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 1.4 *Sia $u : X \to \mathbb{R}$ una funzione di utilità, con la proprietà dell'utilità attesa, che descrive le preferenze di un individuo sulle conseguenze. La funzione $\hat{u} : X \to \mathbb{R}$ è anch'essa una funzione di utilità, con la proprietà dell'utilità attesa, che descrive le preferenze di quell'individuo se e solo se*

$$\hat{u}(x) = au(x) + b, \text{ con } a > 0. \tag{1.11}$$

In condizioni di certezza, qualsiasi trasformazione crescente di una funzione di utilità sulle conseguenze è anch'essa una funzione di utilità, che descrive le stesse preferenze sulle conseguenze (PROP. 1.3). Esistono quindi infinite possibili trasformazioni. Si dice a tale proposito che l'utilità è un concetto «ordinale», in quanto permette solamente di dire se, date due conseguenze, un individuo preferisce la prima alla seconda, la seconda alla prima o è indifferente tra le due. La funzione di utilità stabilisce un «ordine» tra due conseguenze, ma non è in grado di misurare l'intensità delle preferenze, ovvero di quanto un individuo preferisce una conseguenza a un'altra.

In condizioni di rischio, invece, solo una trasformazione lineare crescente di una funzione di utilità sulle conseguenze con la proprietà dell'utilità attesa dà luogo a un'altra funzione di utilità sulle conseguenze con la proprietà dell'utilità attesa che descrive le stesse preferenze sulle lotterie.

La richiesta che la funzione di utilità sulle conseguenze goda della proprietà dell'utilità attesa è compatibile con infinite trasformazioni della funzione di utilità, che si limitano, però, alla scelta di due soli parametri: a e b (EQ. (1.11)). Si dice che l'utilità è, in questo contesto, un concetto «cardinale». La giustificazione di tale terminologia risiede nel fatto che anche le misure del mondo fisico permettono di scegliere due parametri, tipicamente il valore zero e l'unità di misura. Per esempio, è possibile passare da gradi Celsius a gradi Fahreneit mediante la formula $F = 9/5C + 32$. Zero gradi Celsius corrispondono a 32 gradi Fahreneit e ciascun aumento di un grado Celsius corrisponde a un aumento di 9/5 gradi Fahreneit.

L'utilità di una conseguenza, opportunamente ricalcolata, ha, in questo contesto, un significato economico.

Sia $u(x)$ una funzione di utilità con la proprietà dell'utilità attesa e x_1, x_2

e x_3 tre conseguenze, con $x_1 \succ x_2 \succ x_3$. Per la PROP. 1.4, anche

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{u(x_1) - u(x_3)} u(x) - \frac{u(x_3)}{u(x_1) - u(x_3)} \tag{1.12}$$

è una funzione di utilità con la proprietà dell'utilità attesa.

I valori di a e di b sono stati scelti in modo da far sì che $\hat{u}(x_1) = 1$ e $\hat{u}(x_3) = 0$. Le conseguenze x_1 e x_3 giocano quindi il ruolo delle lotterie L_M e L_m nella lotteria che precede l'EQ. (1.10).

Chiamiamo α l'utilità della conseguenza x_2 con la nuova funzione di utilità.

$$\hat{u}(x_2) \stackrel{def}{=} \alpha \in (0, 1). \tag{1.13}$$

L'utilità, per l'individuo, della conseguenza x_2 è uguale alla sua utilità attesa di una lotteria che dà la conseguenza x_1 con probabilità α e la conseguenza x_3 con probabilità $1 - \alpha$.

La trasformazione (1.12) permette quindi di convertire un'utilità in una probabilità. Questa probabilità ha un significato economico.

In presenza di rischio, la richiesta che la funzione di utilità sulle conseguenze goda della proprietà dell'utilità attesa fa sì che l'utilità sia un concetto cardinale, ma non nel senso neoclassico del termine. L'utilità non è, infatti, in grado di misurare l'intensità delle preferenze di un individuo, ovvero di quanto preferisce una conseguenza a un'altra.

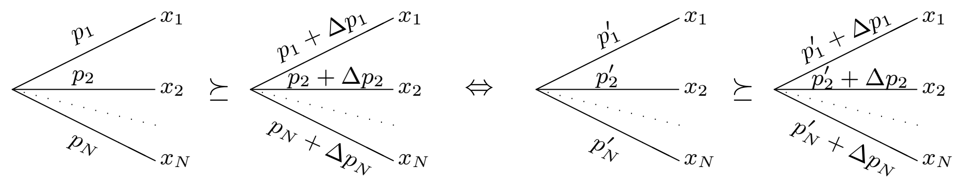
La funzione di utilità attesa (EQ. (1.8)) è separabile additivamente nelle utilità sulle conseguenze $u(x_i)$ ed è lineare nelle probabilità: $\pi(p_i) = p_i$. Questo ha un'implicazione rilevante nella scelta tra lotterie.

Siano p_i e $p_i + \Delta p_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $\sum_{i=1}^{n} \Delta p_i = 0$, le probabilità degli N possibili esiti, rispettivamente, delle lotterie P e Q. Dall'EQ. (1.9),

$$P \succeq Q \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{N} \Delta p_i u(x_i) \leq 0. \tag{1.14}$$

L'EQ. (1.14) vale anche se sostituiamo $\succeq$ con $\sim$ o con $\succ$; il segno del lato destro diventa, rispettivamente, $=$ e $<$.

La preferenza tra le due lotterie dipende solo dalla variazione delle probabilità, e non dal valore delle probabilità iniziali. Si ha, quindi,



per ogni p_i, p'_i e Δp_i tale che $p_i+\Delta p_i \in (0,1)$ e $p'_i+\Delta p_i \in (0,1)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $\sum_{i=1}^{n} \Delta p_i = 0$. Un risultato analogo vale nel caso di preferenza stretta ($\succ$) o di indifferenza ($\sim$).

La linearità nelle probabilità richiede che un individuo razionale debba valutare nello stesso modo un aumento dell'1% della probabilità che si verifichi l'esito x_i, indipendentemente dal fatto che si passi dallo 0% all'1%, dal 49% al 50%, dal 99% al 100%. Ritorneremo su questo aspetto della teoria dell'utilità attesa quando illustreremo il paradosso di Allais (PAR. 1.2.4).

Il teorema di von Neumann e Morgenstern gioca un ruolo cruciale in questo volume. Qualsiasi scelta finanziaria verrà infatti interpretata come una scelta tra lotterie. In base a tale teorema, un individuo razionale, il quale sceglie la lotteria che preferisce, deve scegliere la lotteria alla quale è associata l'utilità attesa più elevata. Sinteticamente, diremo che, in un problema decisionale caratterizzato dalla presenza di rischio, un individuo razionale deve massimizzare la sua utilità attesa.

Abbiamo finora considerato un insieme di conseguenze X finito. È però possibile che X sia un sottoinsieme del campo dei numeri reali. In questo caso, definiremo una lotteria tramite una funzione di densità $f(x)$. L'EQ. (1.9) diventa

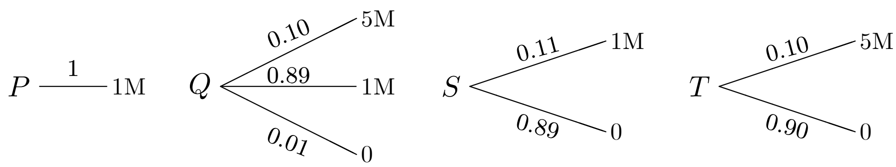
$$P \succeq Q \Leftrightarrow \int u(x) f_P(x) dx \geq \int u(x) f_Q(x) dx \tag{1.15}$$

1.2.4 Critiche e teorie alternative

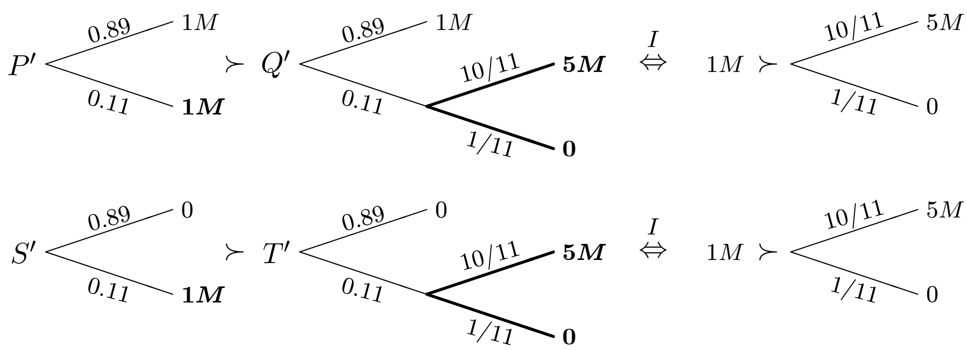
La teoria delle decisioni intende caratterizzare la scelta razionale in presenza di rischio o di incertezza. Si tratta di una teoria di tipo normativo (= ciò che dovrebbe essere), che fornisce delle prescrizioni su come dovrebbe comportarsi un agente economico razionale.

Gli assiomi di completezza, transitività e continuità delle preferenze sono quasi universalmente accettati. L'assioma di indipendenza è, invece, stato spesso criticato.

Consideriamo a tale proposito il paradosso di Allais. Date le quattro lotterie seguenti, ci viene chiesto di scegliere tra la lotteria P e la lotteria Q e tra la lotteria S e la lotteria T. Le conseguenze sono espresse in milioni di euro.



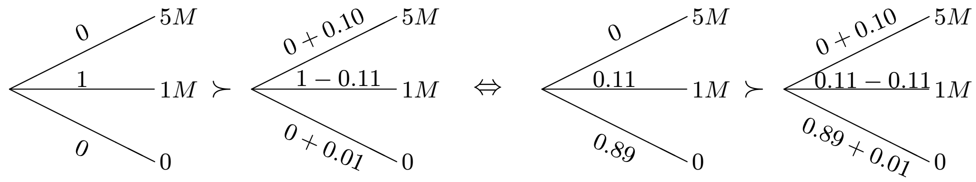
In base all'assioma di riduzione di lotterie composte, nei grafici seguenti, $P' \sim P$, $Q' \sim Q$, $S' = S$ e $T' \sim T$. L'assioma di indipendenza (I) permette di semplificare la scelta tra P' e Q' e tra S' e T'.



Tenendo conto della transitività delle preferenze, possiamo concludere che

$$P \succ Q \Leftrightarrow S \succ T. \tag{1.16}$$

Questo risultato dipende dalla linearità nelle probabilità della funzione di utilità attesa (EQ. (1.8)). Da



la teoria della scelta razionale richiede che la risposta alla domanda "siamo disposti ad accettare un aumento della probabilità dell'1% di non ricevere nulla in cambio di un aumento del 10% della probabilità di ottenere cinque milioni, con una diminuzione dell'11% della probabilità di ricevere un milione?" non debba dipendere dalle probabilità iniziali. Di conseguenza, $P \succ Q \Leftrightarrow S \succ T$.

Non c'è nulla di paradossale in questo risultato, visto come una successione di passaggi logici, basati sugli assiomi che caratterizzano la teoria della scelta razionale. Tuttavia, Allais e molti altri dopo di lui hanno provato a chiedere a una pluralità di individui quali fossero le loro preferenze e la maggior parte di essi ha detto di preferire P a Q e T a S, violando quindi la condizione (1.16). Esiste dunque uno iato tra prescrizioni della teoria e comportamento della maggior parte degli individui. Per questo motivo, si parla di paradosso.

In merito all'interpretazione di questo risultato, esistono due punti di vista, quasi opposti. Alcuni economisti, tra i quali Allais, ritengono che la coppia di preferenze $P \succ Q$ e $T \succ S$ sia perfettamente razionale e che l'assioma di indipendenza non abbia alcun valore normativo. Questo richiede di abbandonare il teorema di von Neumann e Morgenstern e di costruire una teoria alternativa alla teoria dell'utilità attesa. In effetti, esistono molte teorie di non massimizzazione dell'utilità attesa, che non verranno però qui presentate, in quanto la maggior parte degli economisti ha continuato a utilizzare la teoria dell'utilità attesa, accettando quindi, almeno implicitamente, il secondo punto di vista, illustrato da Savage (PAR. 1.3). Nell'esperimento di Allais, egli ha manifestato le stesse preferenze della maggior parte degli individui. Tuttavia, una volta che gli è stato mostrato che tali preferenze violano un assioma nel quale crede, ha deciso di cambiare la sua scelta, confessando di aver commesso un errore. Il secondo punto di vista accetta quindi l'idea che, in alcuni casi, eventualmente anche in molti casi, le scelte degli individui violino le prescrizioni della teoria. In questi casi, la teoria mostra di avere uno scarso valore positivo (= ciò che è), senza però che ciò intacchi il suo valore normativo (= ciò che dovrebbe essere).

Esiste una vastissima letteratura di economia comportamentale, la quale ha individuato una serie di aspetti psicologici che giocano un ruolo cruciale nelle decisioni degli individui e li conducono spesso a effettuare scelte che sono considerate irrazionali dalla teoria delle decisioni.

Nel problema considerato da Allais, per esempio, molti individui affermano di valutare molto negativamente l'aumento dell'1% della probabilità di non ricevere nulla quando confrontano le lotterie P e Q. Con la lotteria P, sono certi di ricevere un milione di euro e sono molto restii ad accettare una probabilità dell'1% di non ottenere nulla, anche in cambio di una probabilità del 10% di ricevere quattro milioni di euro in più. Gli stessi individui valutano, invece, molto meno negativamente lo stesso aumento di probabilità di non ricevere nulla quando confrontano le lotterie S e T. Con la lotteria S, sanno che, con una probabilità molto elevata, dell'89%, non otterranno nulla. In questo caso, non considerano così costoso aumentare al 90% questa probabilità, in cambio di una probabilità del 10% di ricevere quattro milioni di euro in più. Questi individui valutano quindi in maniera diversa un aumento dell'1% della probabilità di non ricevere nulla, a seconda che si passi dallo 0% all'1% oppure dall'89% al 90%, violando così la linearità dell'utilità attesa nelle probabilità, che è una conseguenza inevitabile dell'assioma di indipendenza.

La riluttanza di molti individui ad allontanarsi da una situazione che non presenta alcun rischio è spesso chiamata, in questa letteratura, «effetto certezza». Questa non è però l'unica possibile giustificazione psicologica al comportamento di molti individui nel problema proposto da Allais.

La letteratura di economia e di finanza comportamentale merita assolutamente di essere studiata, anche perché permette talvolta di spiegare alcune «anomalie finanziarie», ovvero risultati empirici che sono incompatibili con la teoria dell'utilità attesa.

Il problema di tutti i paradossi è che la loro valutazione è di tipo soggettivo.

Per esempio, nel problema proposto da Allais, ci sono anche molti individui che preferiscono Q a P e T a S. Le loro preferenze non violano, quindi, l'assioma di indipendenza. Questi individui possono essere restii a credere che esista una preferenza diffusa per la lotteria P sulla lotteria Q e uno iato tra comportamento della maggior parte degli individui e prescrizioni della teoria. Può quindi essere utile presentare un altro esempio nel quale viene violato l'assioma di indipendenza.

Il secondo esempio che considereremo è il paradosso di Zeckhauser.

Ipotizziamo di essere costretti a giocare alla *roulette russa* con una rivoltella il cui tamburo può contenere al massimo 6 proiettili. Dovremo premere il grilletto una sola volta. Sia N il numero di proiettili inseriti nel tamburo. Prima di giocare, ci viene data l'opportunità di eliminare *uno* dei proiettili in cambio di un corrispettivo monetario. Siano x e y gli ammontari massimi che saremmo disposti a pagare per eliminare un proiettile se, rispettivamente, $N = 1$ e $N = 4$. La nostra ricchezza iniziale è W_0.

Ipotizziamo che (i) nel caso in cui sopravviviamo, le nostre preferenze sono monotone nella ricchezza, cioè preferiamo avere una ricchezza più elevata rispetto a una più modesta; (ii) nel caso in cui moriamo, non siamo interessati alla nostra ricchezza (per esempio, non abbiamo eredi); (iii) preferiamo vivere piuttosto che morire.

Il teorema di von Neumann e Morgenstern richiede che $x < y$, cioè dovremmo essere disposti a pagare di più per eliminare un proiettile quando nel tamburo ci sono quattro proiettili rispetto a quando ce ne è uno solo.

Sia a tale proposito V_k la conseguenza «vivere con una ricchezza $W_0 - k$» e M la conseguenza «morire». Per definizione di ammontare massimo che siamo disposti a pagare per eliminare un proiettile dal tamburo della rivoltella, dovremmo essere indifferenti tra pagare quella cifra, riducendo in tal modo la probabilità di morire, e non pagarla. Tenendo conto della (ii), si deve avere

$$1 \cdot u(V_x) = \frac{1}{6}u(M) + \frac{5}{6}u(V_0),$$

$$\frac{1}{2}u(M) + \frac{1}{2}u(V_y) = \frac{2}{3}u(M) + \frac{1}{3}u(V_0) \Rightarrow u(V_y) = \frac{1}{3}u(M) + \frac{2}{3}u(V_0).$$

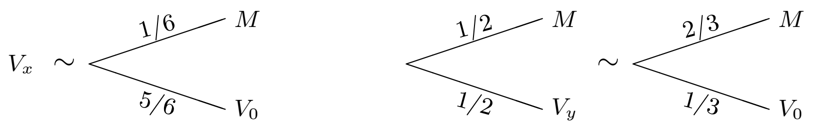
Sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima, si ottiene

$$u(V_x) - u(V_y) = \frac{1}{6}\,(u(V_0) - u(M)) \overset{(iii)}{>} 0.$$

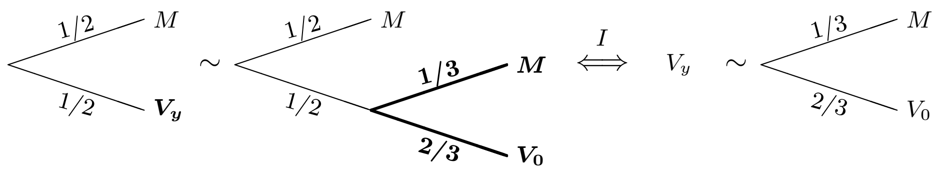
Da $u(V_x) > u(V_y)$, per la (i),

$$x < y.$$

Avremmo potuto ottenere lo stesso risultato utilizzando gli assiomi. Per definizione di x e di y,



La seconda relazione di indifferenza può essere semplificata utilizzando gli assiomi di riduzione di lotterie composte e di indipendenza.



In base a quanto visto sopra, dobbiamo essere indifferenti tra V_x e una lotteria che dà come conseguenza M con probabilità 1/6 e V_0 con probabilità 5/6 e tra V_y e una lotteria che dà come conseguenza M con probabilità 1/3 e V_0 con probabilità 2/3.

In base alla transitività delle preferenze, per valutare se preferiamo V_x o V_y, possiamo confrontare le due lotterie descritte sopra, le cui uniche conseguenze sono M e V_0. Tenendo conto dell'ipotesi (iii), sembra ovvio che dobbiamo preferire la prima delle due lotterie, in quanto dà la conseguenza migliore, V_0, con la probabilità più elevata ($5/6 > 2/3$). Di conseguenza, dobbiamo preferire V_x a V_y.

In termini formali, $V_x \succ V_y$ se e solo se